Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Ministerstvo dopravy
Odbor silniční infrastruktury

TP 215

Využití modální analýzy pro návrh, posouzení, opravy, kontrolu a monitorování mostů pozemních komunikací

Technické podmínky

Schváleno MD-OSI č.j. 983/09-910-IPK/1
ze dne 15.12.09, s účinností od 1.ledna 2010

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Praha, prosinec 2009

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Obsah:

1. Všeobecně
2. Předmět technických podmínek
3. Základní pojmy
4. Obecný popis metody modální analýzy
5. Využití modální analýzy v praxi
   - 5.1 Uplatnění numerické MA pro návrh nového mostu
   - 5.2 Uplatnění numerické MA pro posouzení návrhu nového mostu
   - 5.3 Dynamické zkoušky nového nebo stávajícího mostu
   - 5.4 Uplatnění experimentální MA při přepočtu stávajícího mostu za účelem stanovení jeho zatížitelnosti
   - 5.5 Uplatnění experimentální MA pro monitorování mostu
   - 5.6 Uplatnění experimentální MA při hodnocení skutečného stavu mostu po jejím poškození a při opravě mostu
   - 5.7 Uplatnění experimentální MA při kontrole mostu a při různých případech pochybností o skutečném stavu konstrukce
   - 5.8 Zobecnění pro uplatnění MA
6. Verifikace výpočtových modelů pomocí modální analýzy
7. Evidence výsledků
8. Citované normy
9. Literatura

Příloha A: Experimentální vyšetření charakteristik vlastního kmitání **17**
- A.1 Postup FVT
- A.1.1 Budící systém
- A.1.2 Měřící systém
- A.1.3 Vyhodnocovací systém
- A.2 Postup FVT
- A.2.1 Budící systém
- A.2.2 Měřící systém
- A.2.3 Vyhodnocovací systém
- A.3 Příklad uspořádání experimentální modální analýzy provedené na mostech typu B, C a D (viz Přílohy D, E a F)

Příloha B: Vyhodnocení experimentálně zjištěných hodnot **26**
- B.1 Základní soubor srovnávaných charakteristik vlastního kmitání
- B.2 Srovnání vlastních frekvencí
- B.3 Srovnání vlastních tvarů

Příloha C: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostu typu A **29**

Příloha D: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostu typu B **34**
- D.1 Popis zkoušeného mostního objektu
- D.2 EMA provedená na mostě v Heřmanově Huti
- D.2.1 Popis uspořádání EMA
- D.2.2 Výsledky EMA

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

D.2.3 Změna 1. a 2. vlastní frekvence
D.3 Teoretický model
D.3.1 Popis modelu
D.3.2 Verifikace modelu
D.3.3 Vypočtené vlastní frekvence
D.3.4 Porovnání vypočtených a změřených modálních charakteristik
D.4 Shrnutí výsledků

Příloha E: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostu typu C **53**

Příloha F: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostu typu D **66**

Příloha G: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostu typu E **73**

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

1. Všeobecně

Tyto technické podmínky (TP) jsou zaměřeny na modální analýzu (MA) betonových, ocelových, ocelobetonových mostů pozemních komunikací převážně trámových, lze je přiměřeně použít i pro lávky pro chodce, dále jen mosty. Obecné principy jsou využitelné i pro mosty deskové, rámové, obloukové, zavěšené a visuté.

MA lze použít pouze pro nepřesypané mosty.

TP jsou určeny pro objednatele, projektanty a správce betonových, ocelových a ocelobetonových mostů na pozemních komunikacích. Jsou určeny rovněž osobám oprávněným provádět hlavní nebo mimořádné prohlídky.

Cílem těchto TP je seznámení uživatelů TP s možnostmi MA a s využitím jejích předností

- při návrhu nového mostu,
- při posuzování návrhu nového mostu,
- při dynamické zkoušce nového nebo stávajícího mostu,
- při přepočtu stávajícího mostu za účelem stanovení jeho zatížitelnosti,
- při monitorování mostů,
- při hodnocení skutečného stavu mostu po jeho poškození a při opravě mostu,
- při kontrole mostu a při různých případech pochybností o skutečném stavu mostu.

Hlavní předností MA v porovnání se statickou nebo dynamickou zatěžovací zkouškou je její větší vypovídací schopnost, lze jí také opakovat v libovolných krátkodobých i dlouhodobých časových intervalech s možností porovnávání výsledků.

Tyto TP jsou výstupem výzkumných projektů:

- Číslo 803/120/112 „Využití modální analýzy pro hodnocení mostních konstrukcí“ [11] řešeného v letech 2001 – 2003.
- Číslo 1F45D/077/120 „Odezva mostů na zatížení teplotou a dopravou“ [12] řešeného v letech 2004 – 2007.
- Jsou zde zapracovány některé poznatky z projektu č. 1F55A/004/120 „Hodnocení závad na ocelových mostech“ [13], který byl řešen v letech 2005 – 2008.

Doporučení v těchto TP vycházejí ze zkušeností při provádění MA v rámci řešení projektu [11] v letech 2001 až 2003 a dále na řadě mostů pozemních komunikací v celé České republice v letech 1995 až 2009.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

2. Předmět technických podmínek

TP stanoví zásady a technické možnosti využití MA pro návrh, posouzení, opravy, kontrolu a monitorování mostů pozemních komunikací.

Podle těchto TP může být vypracován návrh na provedení a vyhodnocení experimentální modální analýzy (EMA) nového mostu před jeho uvedením do provozu nebo stávajícího mostu při jeho kontrole nebo dlouhodobém sledování. Poznatky z EMA lze použít při návrhu resp. při posuzování návrhu nových obdobných mostních objektů.

Tyto TP se zabývají použitím MA pro stanovení dynamických vlastností mostních objektů nebo jejich částí. TP neobsahují teoretické základy MA. Odkazují na odbornou literaturu.

TP obsahují obecný popis metody MA, uvádějí možnosti jejího využití u mostních objektů, zejména popisují přípravu a provedení experimentálního vyšetření dynamických charakteristik na skutečném mostě, vyhodnocení výsledků a z nich vyplývajícího návrhu opatření.

Podrobnější popis využití MA pro mostní objekty na pozemních komunikacích je uveden v kap. 5.

3. Základní pojmy

Základní pojmy mostního názvosloví jsou stanoveny v ČSN 73 6200, základní pojmy zatížení jsou uvedeny v ČSN EN 1991-2, základní pojmy z oblasti navrhování jsou v ČSN EN 1992-2, ČSN EN 1993-2, ČSN EN 1994-2 a ČSN EN 1995-2, základní pojmy týkající se zatěžovacích zkoušek mostů jsou uvedeny v ČSN 73 6209 a základní pojmy z oblasti zatížitelnosti a prohlídek mostů jsou v ČSN 73 6221 a ČSN 73 6222.

Pro tyto TP se definují následující základní pojmy:

(1) **Kmitání konstrukce** - v čase proměnná velikost přetvárné veličiny, nebo její derivace podle času či vnitřní síly konstrukce (průhybu, výchylky, pootočení, rychlosti, zrychlení, poměrné deformace, napětí, ohybového momentu apod.), která je vztažena relativně k referenční hodnotě (zpravidla hodnotě odpovídající účinkům vlastní tíhy konstrukce), a která nabývá střídavě větších a menších hodnot vzhledem ke střední nebo referenční hodnotě.

(2) **Volné kmitání** – kmitání konstrukce vyvolané nenulovými počátečními podmínkami pohybu konstrukce (počáteční výchylkou, počáteční rychlostí), při kterém na konstrukci nepůsobí vnější budící síly. Při volném kmitání konstrukce kmitá ve svých vlastních frekvencích a tvarech.

(3) **Vlastní kmitání** – kmitání, při kterém konstrukce kmitá některým z vlastních tvarů kmitání.

(4) **Vynucené kmitání** – kmitání konstrukce vyvolané působením vnějších dynamických sil.

(5) **Budicí síla, buzení** – vnější dynamická síla (popřípadě jiný zdroj kinetické energie) působící na konstrukci tak, že vyvolává kmitání konstrukce.

(6) **Dynamická odezva konstrukce** – kvantitativní vyjádření výstupu (kmitání) konstrukce na známou budící sílu.

(7) **Frekvenční přenosová funkce, FRF (Frequency response function)** – matematický vztah mezi dynamickou odezvou konstrukce a budící silou, která odezvu vyvolala.

(8) **Charakteristiky vlastního kmitání** – vlastní frekvence, vlastní tvary a jim příslušný útlum.

(9) **Modální charakteristiky** – ekvivalentní pojem pro „charakteristiky vlastního kmitání“.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

(10) **FFT (Fast Fourier Transform, rychlá Fourierova transformace)** - matematický algoritmus, který se používá ke zpracování naměřeného kmitání konstrukce, naměřená data jsou převedena z časové do frekvenční oblasti, je získána informace o frekvenčním složení naměřeného kmitání.

(11) **Dynamický výpočet (numerická analýza)** – souhrn metod sloužících k výpočtu kmitání výpočtového modelu konstrukce. Dynamické výpočty se dělí na:
- dynamický výpočet vlastního kmitání a
- dynamický výpočet vynuceného kmitání.

(12) **Numerická modální analýza** – postup, který k popisu kmitání konstrukce využívá možnosti rozkladu složitého kmitavého procesu na dílčí modální příspěvky. Každý z těchto příspěvků je charakterizován vlastní frekvencí a vlastním tvarem kmitání. *Pozn.: Pojem „numerická modální analýza“ odpovídá termínu „výpočet dynamické odezvy stavební konstrukce metodou řešení rozkladem podle tvarů vlastního kmitání“.*

(13) **Numerická analýza vlastního kmitání** - souhrn numerických metod sloužících k výpočtu charakteristik vlastního kmitání (vlastních frekvencí a vlastních tvarů) výpočtového modelu konstrukce.

(14) **Experimentální modální analýza (EMA)** – souhrn experimentálních metod sloužících k zjištění charakteristik vlastního kmitání stávající konstrukce. *Poznámka: Ve smyslu názvosloví ČSN 73 2044 „Dynamické zkoušky stavebních konstrukcí“ pojem „experimentální modální analýza“ odpovídá termínu „dynamická zkouška informativní“.*

(15) **Dynamická zkouška** – souhrn experimentálních metod používaných pro sledování kmitání stavebních konstrukcí, dynamické zkoušky se dělí na:
- dynamické zkoušky sloužící k zjištění charakteristik vlastního kmitání (experimentální modální analýza, dynamická zkouška informativní)
- dynamické zkoušky sloužící k zjištění dynamické odezvy konstrukce na vnější zatížení (dynamické zatěžovací zkoušky).

(16) **Dynamická zatěžovací zkouška** – souhrn experimentálních postupů pro zjištění dynamické odezvy konstrukce na užitné (provozní, nebo extrémní), popř. jiné vnější dynamické zatížení.

(17) **Verifikace výpočtového modelu mostu** – postupné úpravy a zpřesňování výpočtového modelu mostu tak, aby se výsledky výpočtů provedených na tomto modelu co nejvíce přibližovaly výsledkům získaným při experimentu na reálné konstrukci.

4. Obecný popis metody experimentální modální analýzy

Experimentální modální analýzu (EMA) na mostních objektech může provádět pouze:

- Akreditovaná zkušební laboratoř – zkušebna akreditovaná ČIA k provádění zatěžovacích zkoušek mostů podle ČSN 73 6209.
- Zkušebna, která má k provádění zatěžovacích zkoušek mostů podle ČSN 73 6209 pověření od ústředního orgánu státní správy ve věcech dopravy.

Zkušebna musí splňovat požadavky MP SJ-PK - část II/2 „Průzkumné a diagnostické práce“ (podrobnosti jsou k dispozici na internetových stránkách : **www.pjpk.cz**). Odborným garantem zkoušky musí být osoba, která je držitelem „Oprávnění k provádění průzkumných a diagnostických prací souvisejících s výstavbou, opravami, údržbou a správou pozemních komunikací“ pro oblast zatěžovacích zkoušek mostů, které vydává MD ČR.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

EMA se na mostu provádí:

- je-li vyžadována orgánem státní správy rozhodujícím o uvedení mostu do provozu,
- je-li požadována v projektové dokumentaci mostního objektu,
- je-li požadována investorem po dohodě se správcem mostního objektu,
- na základě doporučení z hlavní nebo mimořádné prohlídky,
- na základě výsledků provedeného diagnostického průzkumu mostního objektu,
- v případě pochybností o skutečném chování mostního objektu,

a to zejména u mostních objektů neobvyklých statických soustav, mimořádných rozpětí, vyráběných užitím nových technologií nebo nových materiálů, u mostů rekonstruovaných, u kterých bylo výrazně zasaženo do nosného systému.

Cílem EMA mostního objektu je stanovit jeho charakteristiky vlastního kmitání – vlastní frekvence, vlastní tvary a jim příslušný útlum. Experimentálně stanovené charakteristiky vlastního kmitání zachycují skutečný stav, vlastnosti a prostorové chování sledovaného mostního objektu v okamžiku provedení experimentu.

Při EMA se dnes používají dva základní postupy experimentálního určování charakteristik vlastního kmitání zkoušené konstrukce:

- naměřená dynamická odezva konstrukce je normována k budící síle, která dynamickou odezvu vyvolala (postup FVT – forced vibration testing)
- naměřené kmitání konstrukce je normováno ke kmitání konstrukce v tzv. referenčním bodu (postup AVT – ambient vibration testing)

Použité uspořádání EMA, její rozsah a náklady na její provedení vycházejí z cílů, pro jejichž dosažení je MA prováděna.

Rozsah EMA při uvádění mostního objektu do provozu v těchto TP vychází z podmínek popsaných v ČSN 73 6209 Změna Z1 [2].

5. Využití MA

MA je obecně experimentální a numerická.

Při numerické modální analýze se nejprve sestaví vhodný výpočtový model nosné konstrukce mostu vystihující její základní vlastnosti z hlediska dynamického výpočtu. Na tomto modelu se vypočtou frekvence a tvary vlastního kmitání. Tyto charakteristiky vlastního kmitání se následně použijí k výpočtu vynuceného kmitání mostu metodou „řešení rozkladem podle tvarů vlastního kmitání“.

Ve zvláštních odůvodněných případech výpočtu úrovně kmitání (v měřítku výchylek, rychlosti nebo zrychlení) stávajícího mostního objektu je možné k dynamickému výpočtu vynuceného kmitání použít metodu „řešení rozkladem podle tvarů vlastního kmitání“ a v ní využít vlastní frekvence, vlastní tvary a útlum kmitání zkoumaného mostního objektu zjištěné pomocí EMA.

Model nosné konstrukce mostu pomocí EMA je definován volbou míst měření a lze jej použít pouze k lineárnímu výpočtu. Model lze dále modifikovat přidáváním tuhých nebo pružných vazeb, hmot nebo tlumících prvků a na upraveném modelu je možné studovat dopad těchto úprav na vlastnosti modelovaného mostu. Případná realizace těchto změn na skutečné nosné konstrukci nemusí být jednoduchá a v některých případech ani možná.

Přesnost numerických výpočtů, výstižnost výpočtových modelů je často potřeba ověřit porovnáním výsledků výpočtu se skutečnými hodnotami vlastností konstrukce. K tomu je

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

nutno použít vhodnou experimentální metodu. V posledních letech se k ověřování výpočtových modelů existujících konstrukcí ve stavebnictví stále více používá metoda EMA. Pokud výpočtový model dobře vystihuje vlastnosti modelovaného mostu, jsou jeho vlastní frekvence, vlastní tvary kmitání a předpokládaná velikost tlumení v určité oblasti frekvencí srovnatelné s hodnotami zjištěnými EMA. Na základě tohoto porovnání je možno verifikovat model a posoudit vypovídací schopnost výpočtu. EMA lze také využít při diagnostickém průzkumu mostů.

Experimentální ověření mostního objektu na základě EMA včetně vyhodnocení je dnes při vhodné aplikaci rychlé, relativně finančně nenáročné, minimálně omezuje dopravu (v některých případech i bez omezení dopravy) a nepoškozuje vyšetřovanou konstrukci. Další podstatnou výhodou ve srovnání s dosud běžně používanými statickými nebo dynamickými zkouškami je větší citlivost této metody a větší vypovídací schopnost při posuzování přiléhavosti výpočetního modelu konstrukce.

Experimentální modální analýzu mostů pozemních komunikací lze prakticky využít v těchto případech:

a) Při dynamických zkouškách nových nebo stávajících mostů podle ČSN 73 6209 Změna Z1 [2] (podrobnosti viz kap. 5.3).
b) Při přepočtu stávajícího mostu za účelem stanovení jeho zatížitelnosti (podrobnosti viz kap. 5.4).
c) Při dlouhodobém monitorování skutečného stavu nosné konstrukce mostu (podrobnosti viz kap. 5.5).
d) Při hodnocení skutečného stavu mostu po jeho poškození, uplatnění experimentální MA při opravě mostu (podrobnosti viz kap. 5.6).
e) Při kontrole mostu, při různých případech pochybností o skutečném stavu konstrukce (podrobnosti viz kap. 5.7).

EMA však nelze stanovit skutečnou velikost nebo „malé“ změny předpětí v nosné konstrukci mostu z předpjatého betonu.

Základem pro efektivní využití MA v praxi je optimalizace jejího použití pro jednotlivé typy konstrukcí.

Pro praktickou aplikaci lze s výhodou využít zkušeností a znalostí získaných z řešení projektu [4]. Jedná se zvláště o využití verifikovaných výpočetních modelů pěti reprezentativních typů mostů, které byly podrobeny EMA:

Typ A: Mostní objekt o jednom poli z podélných dílců z předpjatého betonu s rozpětím do 30 m – v rámci [11] byla modální analýza provedena na silničním mostním objektu montovaném z devíti podélných dílců z předpjatého betonu I 73 doplněných zmonolitňující železobetonovou deskou, který staticky působí jako prostý nosník o rozpětí 29,0 m.

Typ B: Mostní objekt o více polích (spojitý nosník nebo sdružený rám) z monolitického předpjatého betonu do max. rozpětí pole 42,0 m. V rámci [11] byla modální analýza provedena na silničním mostním objektu s deskovou nosnou konstrukcí z monolitického předpjatého betonu, který staticky působí jako spojitý nosník o čtyřech polích s rozpětím nejdelšího pole 18,5 m, most je šikmý.

Typ C: Mostní objekt o jednom nebo více polích se spřaženou ocelobetonovou nosnou konstrukcí do max. rozpětí pole 50 m. V rámci [11] byla modální analýza provedena na silničním mostním objektu, jehož nosnou konstrukci tvoří ocelobetonový spřažený trám se čtyřmi hlavními ocelovými svařovanými I nosníky a monolitickou železobetonovou deskou mostovky, který staticky působí jako spojitý nosník o třech polích s rozpětím nejdelšího pole 31,5 m.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Typ D: Mostní objekt o jednom nebo více polích s ocelovou nosnou konstrukcí do max. rozpětí pole 135 m. V rámci [11] byla provedena modální analýza na silničním mostním objektu ocelovém komorovém celosvařovaném s ortotropní mostovkou, který staticky působí jako nosník o třech prostých polích s rozpětím 27,0 m.

Typ E: Mostní objekt o 3 a více polích z předpjatého betonu montovaný ze segmentů s vnějšími kabely do max. rozpětí pole 60 m. V rámci [11] byla provedena modální analýza mostního objektu z předpjatého betonu montovaného z komorových segmentů SSŽ F I, který statický působí jako spojitý nosník o 4 polích s rozpětím největšího pole 50,6 m.

Při praktické aplikaci EMA lze využít zkušeností z odpovídajícího mostu. Jedná se o volbu výpočetního modelu, o postup při jeho verifikaci, o způsob provedení a vyhodnocení modální analýzy. Podrobnější výsledky řešení pro výše uvedené mosty jsou uvedeny v přílohách D, E, F a G tohoto TP.

Experimentální a numerickou MA lze uplatnit v různých fázích návrhu a životnosti mostních objektů.

5.1 Uplatnění numerické MA při návrhu nového mostu

Numerickou MA lze uplatnit při hledání nejvhodnější varianty tvaru mostu a jeho statického uspořádání ve stádiu studie nebo ve stupni DUR případně DSP. Tento postup je vhodné použít u mostních objektů, jejichž nosné konstrukce jsou zvláště náchylné na rozkmitávání od účinků proměnného zatížení (např. dopravou nebo větrem) v následující posloupnosti činností:

- výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitání na teoretických modelech jednotlivých variant mostu,
- posouzení rizika vzniku rezonančního kmitání jednotlivých variant konstrukce mostu nebo jeho částí na základě vypočtených vlastních frekvencí a vlastních tvarů, vyloučení nevhodných variant z dalšího posuzování,
- na teoretických modelech zbývajících variant mostu se vyšetří vynucené kmitání od účinků proměnného zatížení,
- porovnání vynuceného kmitání jednotlivých variant,
- provede se výběr nejvhodnější varianty mostního objektu s ohledem na jeho dynamické chování,
- případně se upraví vybrané varianty za účelem dosažení vhodnějšího dynamického chování.

5.2 Uplatnění numerické MA při posouzení návrhu nového mostu

Ve stupni DSP, ZDS a RDS lze numerickou MA použít následovně:

- Formulace požadavků na dynamické vlastnosti navržené konstrukce s ohledem na dynamické charakteristiky předpokládaného zatížení.
- Vyšetření vynuceného kmitání mostu od účinků proměnného zatížení na výpočtovém modelu navržené konstrukce (předpokládá se, že konstrukce je již staticky posouzena, tzn. že je již známa hmotnost konstrukce a tuhost celé konstrukce i tuhosti všech prvků). Na výpočtovém modelu se stanovuje úroveň vynuceného kmitání celého mostu a/nebo jednotlivých konstrukčních částí na jednotlivé budící účinky.
- Posouzení vypočtené úrovně vynuceného kmitání podle normových hodnot v mezním stavu použitelnosti nebo únosnosti.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

- V případě nesplnění normových ustanovení je nutná změna navrhované konstrukce (změna hmotnosti, tuhosti nebo změna okrajových podmínek).

5.3 Dynamické zkoušky nového nebo stávajícího mostu

Norma ČSN 736209 uvádí důvody, kdy je vhodné provedení dynamické zkoušky. EMA lze uplatnit při dynamické zkoušce nového nebo stávajícího mostu podle ČSN 73 6209 Změna Z1 [2].

Doporučuje se, aby základní částí dynamické zkoušky mostu byla EMA. Vypovídací schopnost dynamických charakteristik stanovených EMA je podstatně větší než běžně používané dynamické zkoušky ke zjištění dynamického součinitele. Pro ověření správnosti použitého výpočtového modelu je nutné experimentálně stanovit relativně malý počet vlastních frekvencí a příslušných tvarů kmitání (počet závisí na typu mostu a složitosti výpočtového modelu). Tyto dynamické charakteristiky jsou výchozím stavem pro posuzování jejich změn v průběhu využívání mostu. Jako výchozí stav jsou zvláště výhodné dynamické charakteristiky nového mostu.

Provedení EMA při zatěžovací zkoušce před uvedením mostu do provozu dává předpoklad pro následné využití EMA kdykoliv v budoucnu. Porovnáním hodnot dynamických charakteristik lze zjistit, zda v průběhu času došlo ke změně dynamického chování a v tomto případě lze odhadovat, co změnu způsobilo (změna hmotnosti, změna tuhosti, změna okrajových podmínek nebo vzájemná kombinace těchto vlivů).

Doporučený postup:

- sestavení výpočtového modelu mostního objektu
- výpočet frekvencí a tvarů vlastního kmitání na výpočtovém modelu mostu,
- teoretická příprava experimentální modální analýzy na konkrétním mostě,
- návrh budícího, měřícího a vyhodnocovacího systému,
    - rozsah zkoušky musí být stanoven tak, aby byly splněny podmínky z ČSN 73 6209 Změna Z1 [2] pro „základní soubor ověřovaných vlastních frekvencí“,
    - ke zkoušce je vhodné použít zdroj řízené budící síly,
    - orientační rozsah sledovaných bodů pro konstrukci, u které ve vlastních tvarech kmitání příslušných k základnímu souboru ověřovaných vlastních frekvencí kmitá celá nosná konstrukce mostu nebo její podstatná část, nebo pouze dílčí část konstrukce (např. spojitý nosník s jedním polem o výrazně větším rozpětí než u zbývajících polí) – minimálně 3 body ve sledovaném příčném řezu, minimálně 5 příčných řezů na jednu vlnu vlastního tvaru patřícího do základního souboru na části konstrukce, na které dochází ke kmitání.
- harmonogram zkoušky,
- provedení zkoušky,
- vyhodnocení experimentálně zjištěných charakteristik vlastního kmitání,
- porovnání experimentálně zjištěných charakteristik vlastního kmitání s hodnotami teoretickými podle ČSN 73 6209 Změna Z1 [2],
- závěr z provedené modální analýzy (jedná se o výsledek zatěžovací zkoušky),
- při neshodě výsledků (při negativním výsledku zatěžovací zkoušky) je nutno hledat příčiny:
    - ve výpočtovém modelu – buď že některé vstupní údaje do výpočtového modelu neodpovídají skutečnosti (např.: okrajové podmínky v uložení konstrukce nesouhlasí se skutečností – lze tím odhalit špatnou funkci ložiska nebo mostního

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

závěru) nebo že použitý výpočetní model konstrukce není dostatečně přiléhavý (v tomto případě lze neshodu odstranit pomocí verifikace výpočtového modelu, tj. prostřednictvím vyhledání nejpřiléhavějšího výpočtového modelu mostního objektu, podrobněji viz kap. 6)

- na zkoumaném mostním objektu může být neznámá závada nebo porucha, porovnáním změřených a vypočtených vlastních tvarů je možné provést lokalizaci místa, ve kterém se nachází příčina neshody rozdílného chování výpočtového modelu a zkoumaného mostního objektu,

Nedoporučuje se nahrazení postupu podle ČSN 73 6209 pouze provedením EMA (bez ověření výpočtového modelu). Tento postup u nového mostu je vhodný pouze pro ověření opakovaných konstrukcí stejného typu a rozměrů, jejichž výpočtové modely byly již dříve podle ČSN 73 6209 ověřeny nebo pro jednoduché ocelové nosné konstrukce o jednom poli.

5.4 Uplatnění experimentální MA při přepočtu stávajícího mostu za účelem stanovení jeho zatížitelnosti

Na stávajícím mostě se provede experimentální modální analýza, jejímž výsledkem jsou vlastní tvary a vlastní frekvence mostu a charakteristiky útlumu. Výpočtový model konstrukce se potom upraví tak, aby byla dosažena maximální shoda vypočtených a změřených charakteristik vlastního kmitání mostu. Na takto verifikovaném výpočtovém modelu lze provádět statické nebo dynamické výpočty, které vedou k výstižnějším hodnotám zatížitelnosti.

Doporučený postup je velmi podobný jako v kap. 5.3, liší se pouze v několika krocích:

- Při návrhu budícího, měřícího a vyhodnocovacího systému:
    - Ke zkoušce je možné použít zdroj řízené budící síly (systém FVT), nebo jiný zdroj např. užitné zatížení (systém AVT). Systém AVT je nutné použít zejména tehdy, když na mostu není možné uzavřít provoz, nebo pokud na konstrukci působí zdroj budící síly srovnatelný s řízenou budící silou (např. vítr, tlaková vlna proudícího vzduchu způsobená průjezdem nákladních automobilů pod sledovaným mostem).
- Verifikace výpočtového modelu mostu – postupuje se v krocích podle obr. 6.1.
- Výpočet zatížitelnosti zkoumaného mostu na verifikovaném výpočtovém modelu.

5.5 Uplatnění experimentální MA při monitorování mostu

Modální analýza je metoda vhodná pro dlouhodobé monitorování vývoje vlastností nosné konstrukce mostního objektu v průběhu jejího využívání. Pomocí modální analýzy lze dlouhodobě sledovat skutečný stav mostního objektu. Významné změny stavebního stavu (změna okrajových podmínek, změna funkce ložisek nebo mostních závěrů, zabránění volné dilatace konstrukce, porušení nosných prvků a obecně všechny změny vedoucí ke změně tuhosti, hmotnosti nebo tlumení) se nutně projeví na změnách jejích dynamických charakteristik. Jedná se v tomto bodě o porovnání minimálně dvou výsledků získaných modální analýzou. V ideálním případě v porovnání dynamických charakteristik s charakteristikami v době uvedení mostu do provozu. Doba mezi dvěma srovnávacími stavy není nikterak omezena a nesnižuje kvalitu hodnocení. Podle zkušeností z jiných oborů lze na základě monitorování v průběhu času vyhodnotit skutečnou příčinu indikované změny vlastností a naplánovat ekonomicky vhodný okamžik pro opravu či výměnu nosné konstrukce.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Na základě velikosti změny charakteristik vlastního kmitání lze pomocí výpočtového modelu určit změnu statické funkce nosné konstrukce mostu. Lze případně i odhalit vnitřní vady, které ovlivňují dynamické charakteristiky i tehdy, kdy je nelze běžnou diagnostikou určit. Tímto způsobem je možné sledovat i vliv jiných degradačních procesů, jako např. oslabení korozí ocelové konstrukce nebo výztuže betonové konstrukce, rozpad betonu, trhliny v ocelové nebo betonové části mostu apod..

Monitorování mostu metodou experimentální MA může být prováděno v libovolných časových intervalech (předpokládá se interval v rocích nebo až desítkách let). Zvláště pak u mostních objektů, jejichž stav je hodnocen klasifikačním stupněm V nebo VI. Některé snímače mohou být trvale instalovány na konstrukci.

Monitorování je možné provádět i kontinuálně nebo v krátkých časových intervalech dle pokynů z řídícího centra. To je případ experimentálního sledování tří mostů v rámci projektu MD [5]. Obdobně by mohly být kontinuálně sledovány velké významné mosty.

V průběhu monitoringu lze sledovat také změny statické, kvazistatické a dynamické odezvy mostu na nahodilé zatížení (především na účinky těžké nákladní dopravy) nebo změny zatížení dopravou a teplotou.

Doporučený postup uplatnění EMA při monitorování mostu v pravidelných časových intervalech je prakticky shodný jako v kap. 5.4, je rozšířen pouze o tento krok:

- Porovnání vyhodnocených charakteristik vlastního kmitání z různých etap monitorování mostního objektu pomocí postupů popsaných v příloze B.

Doporučený postup uplatnění EMA při kontinuálním monitorování mostů:

- Provedení EMA podle kap. 5.3 nebo 5.4.
- Trvalé osazení snímačů kmitání mostního objektu do důležitých míst nosné konstrukce.
- Kontinuální sledování kmitání mostu.
- Průběžné vyhodnocování změn charakteristik vlastního kmitání sledovaného mostního objektu např. pomocí některých postupů popsaných v příloze B.

5.6 Uplatnění experimentální MA při hodnocení skutečného stavu mostu po jejím poškození a při opravě mostu

Při plánování opravy mostního objektu s cílem odstranění poruchy nosné konstrukce nebo zvýšení únosnosti mostu, je možné použít EMA k posouzení úspěšnosti provedené opravy.

EMA lze ověřit, zda zjištěné závady nosné konstrukce mostu (např. trhliny v betonu v důsledku nárazu vozidla do nosné konstrukce mostu nebo spodní stavby) mají vliv na dynamické vlastnosti mostu. Toho lze využít pro objektivní hodnocení významu zjištěných závad a plánování oprav.

Experimentální i numerickou modální analýzu lze uplatnit při přípravě opravy nebo rekonstrukce mostu. Potřeba opravy mostu je vyvolána v důsledku zjištěné závady, potřeba rekonstrukce může být vyvolána také požadavkem zvýšení zatížitelnosti nebo změny prostorového uspořádání mostu. Oprava nebo rekonstrukce mohou vyvolat změnu statického a/nebo dynamické chování mostu - v tomto případě je vhodné uvažovat o využití EMA. Kdyby po provedené opravě mostního objektu nedošlo ke změně dynamického chování, tak potom EMA není vhodné použít.

Doporučený postup uplatnění MA při hodnocení skutečného stavu mostu po jeho poškození a při opravě mostu:

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

- V průběhu projektové přípravy zjistit dynamickým výpočtem charakteristik vlastního kmitání případně metodou numerické MA zjistit změnu chování způsobenou zjištěnou závadou.
- S pomocí EMA provedené na původním neupravovaném mostním objektu získat podklady pro posouzení navrhovaného způsobu opravy v průběhu projektové přípravy a pro následné ověření účinnosti opravy po jejím dokončení.
- Po provedené opravě mostu lze EMA ověřit účinnost opravy a správnost jejího provedení.

EMA může být uplatněna i v případě, že bylo zjištěno nesprávné dynamické chování mostu (vibrace, kmitání při přejezdu vozidel nebo při jisté rychlosti a směru větru apod.). Dynamickým výpočtem charakteristik vlastního kmitání případně metodou numerické modální analýzy lze posoudit, zda navrhované opatření vede k žádoucí změně.

5.7 Uplatnění experimentální MA při kontrole mostu a při různých případech pochybností o skutečném stavu konstrukce

V odůvodněných případech pochybnosti o skutečné statické funkci mostu (na základě provedení hlavní prohlídky, mimořádné prohlídky mostu, nebo výsledků diagnostického průzkumu, na mostu s velmi těžkou nákladní dopravu, na mostu po provedené opravě nebo rekonstrukci apod.) se provede EMA.

Doporučený postup uplatnění MA:

- Na mostu, kde ještě nebyla EMA provedena, se porovnají experimentálně zjištěné charakteristiky s hodnotami teoretickými vypočtenými na stávajícím výpočetním modelu mostu.
- Na mostu, kde byla v dřívějším období EMA provedena, se porovnají stávající charakteristiky vlastního kmitání s původními charakteristikami případně s hodnotami teoretickými vypočtenými na stávajícím výpočetním modelu mostu.
- Při neshodě výsledků dochází k úpravě teoretického modelu konstrukce a k jeho verifikaci. Při verifikaci teoretického modelu může být odhalena dosud neznámá závada. Nejčastějším druhem závady může být změna tuhosti nebo změna okrajových podmínek. Změna tuhosti může být vyvolána např. trhlinou, korozním oslabením, ztrátou stability apod.). Změna okrajových podmínek může být vyvolána nesprávnou funkcí ložisek nebo mostních závěrů. Častou příčinou může být také zabránění volné dilatace mostu (např. závadou na závěrné zdi opěry mostu).

Experimentálně zjištěné charakteristiky dynamické odezvy mostu poslouží v budoucnosti pro porovnání výsledků EMA. (Opakovaná EMA může být provedena kdykoliv v průběhu životnosti mostu. Výsledky z provedené EMA nejsou závislé na čase, a do značné míry ani na způsobu zatěžování a vyhodnocování.)

5.8 Zobecnění pro uplatnění MA

Blokové schéma pro uplatnění MA lze vyjádřit následovně:

- **MA na výpočtovém modelu mostu (numerická MA):**
  - Za účelem posouzení návrhu nového mostu, jehož nosná konstrukce je zvláště náchylná na rozkmitávání
    - Posouzení rizika vzniku rezonančního kmitání na základě vypočtených vlastních frekvencí a vlastních tvarů.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

        - Posouzení vypočtené úrovně vynuceného kmitání z hlediska:
            - mezního stavu použitelnosti,
            - mezního stavu únosnosti.
    - Za účelem výběru nejvhodnější varianty návrhu mostu (např. vyhledání vhodného tvaru mostního objektu) z hlediska dynamického chování
        - Posouzení rizika vzniku rezonančního kmitání na základě vypočtených vlastních frekvencí a vlastních tvarů.
        - Posouzení vypočtené úrovně vynuceného kmitání z hlediska:
            - mezního stavu použitelnosti,
            - mezního stavu únosnosti.
    - Za účelem získání podkladů pro posouzení výstižnosti výpočtového modelu mostního objektu
        - Dynamický výpočet charakteristik vlastního kmitání.
        - Dynamický výpočet vynuceného kmitání.

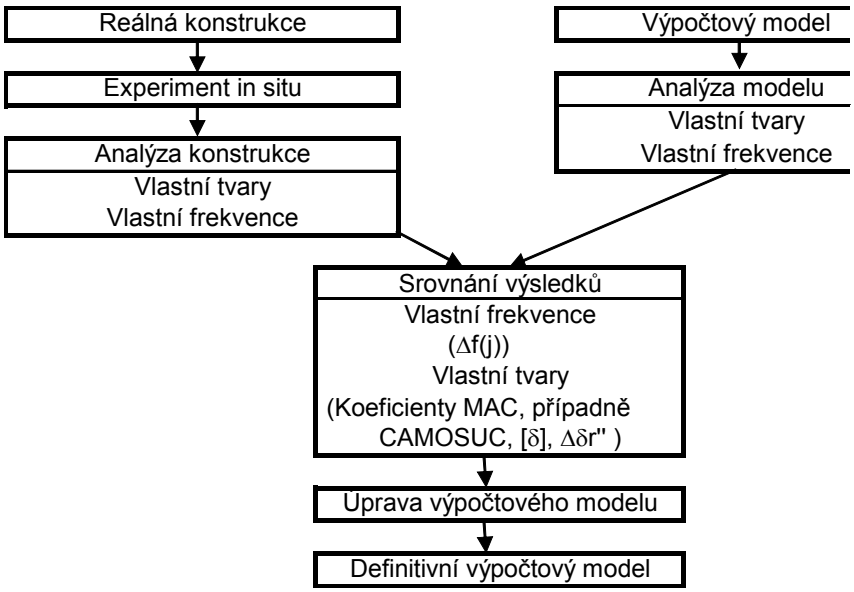
- **EMA provedena na nově postaveném mostním objektu, nebo na konstrukcí, na které MA nikdy nebyla provedena:**
    - Ověření výstižnosti výpočtového modelu mostního objektu, při neshodě výsledků výpočtu a experimentu se provede:
        - verifikace výpočtového modelu mostního objektu,
        - vyhledat příčinu neshody, případně detekovat, lokalizovat závadu a navrhnout způsob odstranění závady.
    - Získání výchozích podkladů pro monitorování mostního objektu, nebo pro hodnocení účinnosti připravované opravy nebo rekonstrukce mostního objektu.

- **EMA prováděna opakovaně (případně soustavně) na stávajícím mostním objektu:**
    - Ověření shody s výsledky předcházející MA
        - Při neshodě najít příčinu, detekovat a lokalizovat závadu nebo poruchu mostního objektu.
            - Naplánování opravy nebo rekonstrukce mostního objektu.
            - Provedení opatření, aby nedocházelo k zhoršování stavu mostního objektu
    - Ověření účinnosti opravy nebo rekonstrukce mostu.
    - Ověření výstižnosti výpočtového modelu mostního objektu, při neshodě výsledků výpočtu a experimentu se provede:
        - verifikace výpočtového modelu mostního objektu,
        - vyhledat příčinu neshody, případně detekovat a lokalizovat závadu.

6 Verifikace výpočtových modelů pomocí modální analýzy

Verifikací výpočtového modelu se rozumí postupné úpravy a zpřesňování výpočtového modelu tak, aby se jeho výsledky co nejvíce přibližovaly výsledkům naměřeným na reálné konstrukci.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. 6.1 Postup verifikace výpočtového modelu na základě výsledků experimentální modální analýzy

Postup verifikace založený na porovnání experimentálně zjištěných a vypočtených vlastních frekvencí a tvarů je znázorněn na obr. 6.1.

7. Evidence výsledků

Evidence výsledků je nutná po celou dobu životnosti mostu, tj. 100 let. Výsledky se zařazují do centrální databáze Systém pro hospodaření s mosty (http://bms.vars.cz).

8. Citované normy

[1] ČSN 73 6209 Zatěžovací zkoušky mostů
[2] ČSN 73 6209 Změna Z1 Zatěžovací zkoušky mostů
[3] ČSN 73 6221 Prohlídky mostů pozemních komunikací
[4] ČSN 73 6222 Zatížitelnost mostů pozemních komunikací
[5] ČSN 73 2044 Dynamické zkoušky stavebních konstrukcí
[6] ČSN EN 1991-2 Eurokód 1: Zatížení konstrukcí – Část 2: Zatížení mostní dopravou
[7] ČSN EN 1992-2 Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 2: Betonové mosty – Navrhování a konstrukční zásady
[8] ČSN EN 1993-2 Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí – Část 2: Ocelové mosty
[9] ČSN EN 1994-2 Eurokód 4: Navrhování spřažených ocelobetonových konstrukcí – Část 2: Obecná pravidla a pravidla pro mosty
[10] ČSN EN 1995-2 Eurokód 5: Navrhování dřevěných konstrukcí Část 2: Mosty

9. Literatura

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

[11] Rotter, T. a kol.: „Využití modální analýzy pro hodnocení mostních konstrukcí“. Výzkumný projekt Ministerstva dopravy ČR číslo 803/120/112, 2001 – 2003.
[12] Rotter, T. a kol.: „Odezva mostů na zatížení teplotou a dopravou“. Výzkumný projekt Ministerstva dopravy ČR číslo 1F45D/077/120, 2004 – 2007.
[13] Studnička, J. a kol.: „Hodnocení závad na ocelových mostech“. Výzkumný projekt Ministerstva dopravy ČR číslo 1F55A/004/120, 2005 – 2008.
[14] Maia, N. – Silva, J. : Theoretical and Experimental Modal Analysis. Research Studies Press Ltd. Taunton, England. 1997.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Příloha A: Experimentální vyšetření charakteristik vlastního kmitání

Experimentální modální analýza (dále jen EMA) je experimentální metoda, která umožňuje studovat dynamické vlastnosti (charakteristiky vlastního kmitání) fyzicky existujícího (stávajícího, reálného) mostního objektu.

Při EMA se používají dva základní postupy experimentálního určování charakteristik vlastního kmitání zkoumaného mostního objektu:

- naměřené kmitání mostu je normováno k řízené a sledované budící síle, která kmitání vyvolala (postup FVT – forced vibration testing)
- naměřené kmitání mostu je normováno ke kmitání mostu změřeném v tzv. referenčním bodu (postup AVT – ambient vibration testing), charakteristiky budících sil, které kmitání vyvolaly, u tohoto postupu nejsou sledovány.

Při EMA se na mostním objektu zvolí konečný počet míst, ve kterých se měří kmitání mostu vyvolané budícími silami, kmitání se měří řádově v desítkách míst pro jeden až tři směry.

A.1 Postup FVT

Při FVT je sledovaný mostní objekt rozkmitáván řízenou budící silou **F(t)**, která na konstrukci působí v budícím bodě **S**. Dynamické vlastnosti této síly jsou v průběhu měření zaznamenávány společně s vyvolanou dynamickou odezvou.

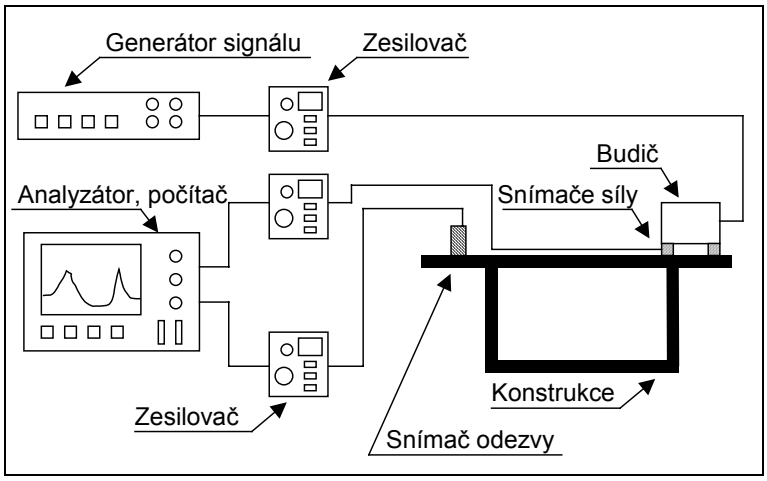
Typické uspořádání EMA je uvedeno na obr. A.1, je složeno ze tří základních částí:

- budicího systému
- měřicího systému
- vyhodnocovacího systému

Při určování polohy budícího bodu **S** se vychází ze základního požadavku, aby bylo možné z vyvolané odezvy konstrukce ve zkoumané frekvenční oblasti co nejpřesněji vyhodnotit všechny významné tvary vlastního kmitání. To znamená, že každý z hledaných vlastních tvarů by měl mít v bodě **S** co největší pořadnici. Pokud by některý tvar měl v bodě **S** uzel kmitání, prakticky by nebylo možné jej vybudit. Při hledání optimální polohy bodu **S** je výhodné vycházet z výsledků dynamického výpočtu.

K buzení konstrukce se zpravidla používá jedno budící zařízení umístěné v jediném budícím bodě **S**, jehož poloha se během vlastního měření již nemění. Pro zpřesnění výsledků měření lze použít postup, při kterém je jedno budící zařízení postupně umístěno do několika budících bodů **S**, nebo více budících zařízení současně působí v různých budících bodech zkoušené konstrukce.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. A.1 Typické uspořádání měření při experimentální modální analýze mostů – postup FVT

A.1.1 Budící systém

K řízenému rozkmitávání mostů se většinou používají budiče. Budič se obvykle umisťuje přímo na konstrukci. Budící síla **F(t)** je u budiče dána setrvačnou silou vzniklou při pohybu budícího závaží, měřena je zpravidla pomocí trojice snímačů síly, které se umisťují mezi konstrukci mostu a tělo budiče, typické uspořádání měření budící síly je nakresleno na obr. A.1, u běžných mostů na pozemních komunikacích je částečné ovlivnění dynamických vlastností konstrukce hmotou budiče zanedbatelné.

Jednotlivé typy používaných budičů se navzájem liší svojí konstrukcí, hmotností, velikostí a charakterem vyvozované budící síly **F(t)**. Používají se budiče s usměrněným vektorem síly (síla působí na přímce). Podle konstrukčního řešení se pro modální analýzu mohou použít například budiče elektrodynamické, hydraulické nebo mechanické.

Elektrodynamické a hydraulické budiče tvoří setrvačná hmota, silový prvek a řídící elektronika. Řídící elektronika generuje řídící signál pro požadovaný časový průběh budící síly (obecně libovolný, nejčastěji náhodný (random), frekvenční sweep (lineárně proměnná budící frekvence) nebo harmonický). Silový prvek, kterým je buď elektromagnetická cívka nebo hydraulický válec zajišťuje požadovaný pohyb setrvačné hmoty. Velikost setrvačné síly se měří v místě styku rámu budiče s konstrukcí mostu.

Některé elektronické systémy řízení budiče jsou schopné pomocí zpětnovazební smyčky kontrolovat skutečnou velikost setrvačné síly vyvolané pohybem setrvačné hmoty.

Mechanické budiče jsou tvořeny dvěma rotujícími excentry (nevyváženými hmotami, nevývažky), které se otáčejí proti sobě, poháněné jedním nebo dvěma elektromotory. Řídící elektronika umožňuje měnit rychlost otáčení excentrů a tím i frekvenci harmonické budící síly. Amplituda harmonické síly závisí na velikosti excentricky umístěných hmot, jejich excentricitě a budící frekvenci.

V současné době se s výhodou používají budiče elektrodynamické nebo elektrohydraulické, které umožňují použít pro modální analýzu spojité buzení konstrukce ve zvoleném frekvenčním pásmu (realizované např. jako náhodná budící síla), a to podstatně snižuje čas potřebný pro provedení vlastního měření.

K rozkmitávání konstrukcí lze využít i zatížení rázem, při kterém se na sledovanou konstrukci působí silovým impulsem vyvolaným pádem známé hmoty ze známé výšky. K vyvolání silového impulsu lze použít také raketové motory.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

A.1.2 Měřicí systém

Úkolem měřicího systému je zaznamenat měřené signály nesoucí informace o budící síle a vyvolané dynamické odezvě sledované konstrukce z jednotlivých bodů sítě.

Skladba měřicího systému, zejména pak použité snímače ovlivňují frekvenční interval, ve kterém je modální analýza provedena.

Při stanovení frekvenčního intervalu prováděné experimentální modální analýzy je vhodné vycházet z dynamického výpočtu provedeném na modelu zkoumaného mostního objektu. Frekvenční interval musí být dostatečně široký, aby bylo možné zachytit všechny požadované vlastní frekvence a vlastní tvary - například vlastní frekvence patřící do „základního souboru ověřovaných vlastních frekvencí“ podle článku 7.2.1 z ČSN 73 6209 Změna Z1 [2].

Základem měřicího systému jsou snímače kmitů, při experimentální modální se používají absolutní snímače dráhy (výchylky), rychlosti nebo zrychlení.

Odezva mostu na budící sílu se měří v síti zvolených bodů ležících na povrchu konstrukce. Počet bodů pro měření odezvy a jejich umístění musí být zvoleny tak, aby všechny vlastní tvary z měřené frekvenční oblasti bylo možno výstižně zobrazit a popsat. Při vlastním měření se snímače postupně umísťují do jednotlivých bodů zvolené sítě.

Teoreticky je možný i opačný postup, tedy měření dynamické odezvy v jediném místě a postupné buzení v síti zvolených bodů na konstrukci. U mostů se tento postup z praktických důvodů nepoužívá.

Snímače jsou připojeny k zesilovačům (ty mohou být i součástí měřicí ústředny) a odtud signál postupuje k měřicí ústředně. Měřicí ústřednou je zpravidla vícekanálový FFT analyzátor, který během měření i vyhodnocování plní mnoho funkcí, často obsahuje i signální generátor pro budící sílu. FFT analyzátor je založen na algoritmu Rychlé Fourierovy transformace (FFT – Fast Fourier Transform), umožňuje registrované analogové signály ze snímačů z časové oblasti převádět v režimu on-line na digitální signály ve frekvenční oblasti, vyhodnocovat a archivovat hledané přenosové funkce $\mathbf{H_{kS}(if)}$. V dnešní době je FFT analyzátor nahrazován měřicí ústřednou doplněnou výkonným počítačem a měřicím programem, který plní funkci FFT analyzátoru.

A.1.3 Zpracování naměřeného kmitání

Při zpracovávání se změřené signály nejprve převádějí pomocí FFT z časové do frekvenční domény a pak se z nich vyhodnocují frekvenční přenosové funkce $\mathbf{H_{kS}(if)}$

$$H_{ks}(if) = \frac{r_k(if)}{F_s(if)} \quad , \tag{A.1}$$

kde **i** je imaginární jednotka, $\mathbf{r_k(if)}$ je dynamická odezva konstrukce (zrychlení, rychlost kmitání, výchylka) v bodě **k** zobrazená ve frekvenční oblasti, která byla vyvolána budící silou $\mathbf{F_s(if)}$ působící v bodě **S**.

Frekvenční přenosová funkce $\mathbf{H_{kS}(if)}$ (FRF – Frequency Response Function) je v podstatě rezonanční křivka, tedy průběh amplitudy odezvy konstrukce, která byla vyvolána harmonickou budící silou o jednotkové amplitudě, v závislosti na budící frekvenci **f**. Přenosové funkce $\mathbf{H_{kS}(if)}$ jsou obecně komplexní funkce, které se zpravidla udávají v goniometrickém vyjádření pomocí velikosti (Magnituda, Magnitude, MAG) a fázového úhlu **φ** (Fáze, Phase, PH), který popisuje zpoždění amplitudy harmonické složky odezvy o frekvenci **f** v bodě **r** oproti amplitudě odpovídající harmonické složky budící síly. Za dynamickou odezvu při výpočtu přenosové funkce $\mathbf{H_{kS}(if)}$ podle vzorce (A.1) může být dosazeno zrychlení (pak se přenosová funkce nazývá inertance), rychlost kmitání (pak se

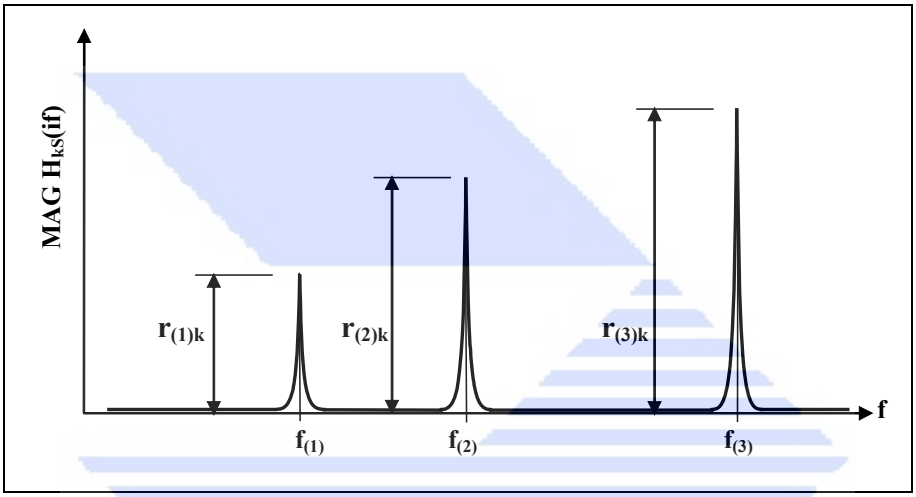
Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

přenosová funkce nazývá mobilita), nebo výchylka (pak se přenosová funkce nazývá receptance).

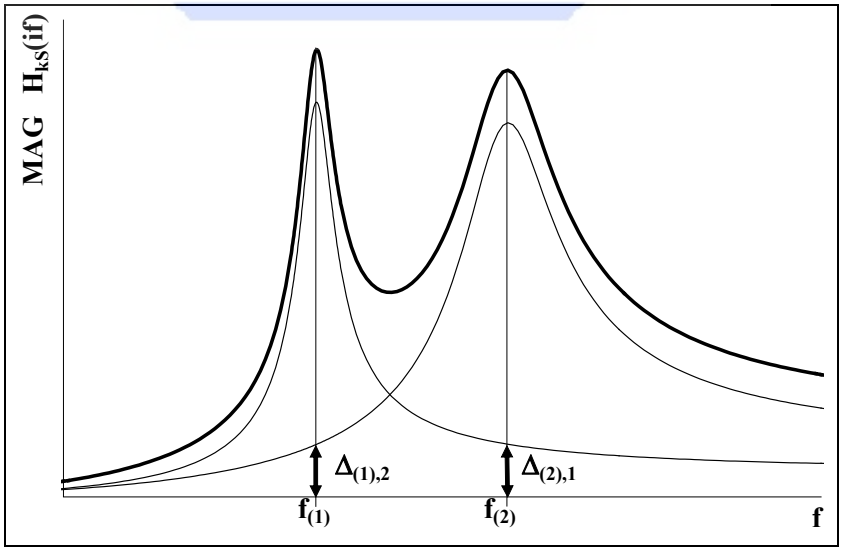
A.1.4 Vyhodnocovací systém

Vstupními údaji pro vyhodnocení charakteristik vlastního kmitání mostního objektu jsou všechny frekvenční přenosové funkce vyhodnocené z experimentu. U každé vypočtené přenosové funkce se zvoleným algoritmem vyhledají předpokládané vlastní frekvence a vytvoří se matematický model přenosové funkce v jejím okolí. S použitím metody nejmenších čtverců se pro celý naměřený soubor frekvenčních přenosových funkcí stanoví nejlepší odhady jednotlivých vlastních frekvencí, vlastních tvarů a tlumení.

Frekvence vlastního kmitání jsou v podstatě frekvence, při kterých dochází k rezonanci, tedy frekvence odpovídající vrcholkům (lokálním maximům) frekvenčních přenosových funkcí.



Obr. A.2 Magnituda přenosové funkce $\mathbf{H_{kS}(if)}$ pro soustavu s malým útlumem a vzdálenými vlastními frekvencemi



Obr. A.3 Magnituda přenosové funkce $\mathbf{H_{kS}(if)}$ pro soustavu s větším útlumem a nedostatečně vzdálenými vlastními frekvencemi, $\Delta_{(1),2}$ – příspěvek druhého vl.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

tvaru k pořadnici přenosové funkce v místě $\mathbf{f_{(1)}}$, $\mathbf{\Delta_{(2),1}}$ – příspěvek prvního vl. tvaru k pořadnici přenosové funkce v místě $\mathbf{f_{(2)}}$.

Hledaná vlastní frekvence ale ve skutečnosti neleží přímo pod vrcholkem křivky, nýbrž v jeho blízkém okolí. To je způsobeno jednak neproporcionálním tlumením a také vlivem tvarů příslušných k dalším vlastním frekvencím ležícím v rezonanční oblasti vyhodnocované vlastní frekvence.

Je-li zkoumaná konstrukce jen slabě tlumená a vlastní frekvence jsou od sebe dostatečně vzdálené (obr. A.2), je možné tyto chyby zanedbat. Za frekvence vlastního kmitání konstrukce pak lze považovat rezonanční frekvence, pořadnice odpovídajících tvarů vlastního kmitání v bodě **k** jsou potom rovny hodnotám přenosové funkce $\mathbf{H_{kS}(if)}$ v místě resonančních frekvencí (obr. A.2). Předpokládá se, že kmitá-li konstrukce vlastní frekvencí, kmitá v odpovídajícím vlastním tvaru. Pro tento případ lze také jednoduše zjistit velikost útlumu

$$b_{r(j)} = \frac{f_2 - f_1}{2\, f_{(j)}} \ , \qquad \text{(A.2)}$$

kde $\mathbf{f_{(j)}}$ je j-tá vlastní frekvence konstrukce, $\mathbf{b_{r(j)}}$ je poměrný útlum příslušný k $\mathbf{f_{(j)}}$, $\mathbf{f_1}$ a $\mathbf{f_2}$ jsou frekvence nalevo a napravo od $\mathbf{f_{(j)}}$ v místě, kde je pořadnice přenosové funkce rovna součinu čísla 0,7071 a velikosti pořadnice v místě $\mathbf{f_{(j)}}$.

V případě, že dochází k podstatnému vzájemnému ovlivnění jednotlivých rezonančních oblastí přenosové funkce, je potřeba tento účinek od sebe oddělit. K vyhodnocení modálních charakteristik ze změřených přenosových funkcí se pak používají speciální matematické metody [14]. U každé vypočtené přenosové funkce se zvoleným algoritmem vyhledají předpokládané vlastní frekvence a vytvoří se matematický model přenosové funkce v jejím okolí. S použitím metody nejmenších čtverců se pro celý naměřený soubor přenosových funkcí stanoví nejlepší odhady jednotlivých vlastních frekvencí, poměrného tlumení a tvarů kmitání.

A.2 Postup AVT

Při AVT je sledovaný mostní objekt rozkmitáván neznámými budícími silami **F(t)**, které vznikají v důsledku působení dynamických zdrojů působících přirozeně na sledované konstrukci (např. vítr, mikroseizmicita, dopravní proud). Dynamické vlastnosti těchto sil není možné sledovat, zavádí se teoretický předpoklad o jejich stacionaritě.

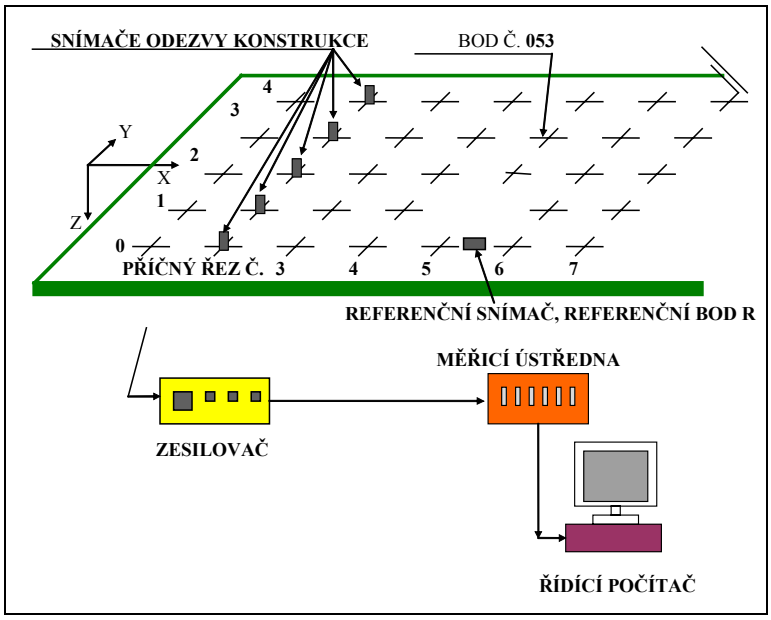
Tento postup je možné použít u dynamicky citlivých konstrukcí s malým tlumením, ve většině praktických případů je přesnost a vypovídatelnost výsledků získaných postupem AVT menší než u metodiky FVT.

Typické uspořádání EMA pro postup AVT je uvedeno na obr.A.4, je složeno ze dvou základních částí:

- měřicího systému
- vyhodnocovacího systému

Pro možnost normování naměřeného kmitání se na mostní objekt do referenčního bodu R umisťuje referenční snímač. Podmínky pro umístění referenčního bodu R jsou shodné jako pro polohu budícího bodu S v postupu FVT. Tedy při určování polohy referenčního bodu **R** se vychází ze základního požadavku, aby bylo možné z vyvolané odezvy konstrukce ve zkoumané frekvenční oblasti co nejpřesněji vyhodnotit všechny významné tvary vlastního kmitání. To znamená, že každý z hledaných vlastních tvarů by měl mít v bodě **R** co největší pořadnici.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. A.4 Typické uspořádání měření při experimentální modální analýze mostů – postup AVT

A.2.1 Měřicí systém

U měřicího systému použitého při postupu AVT odpadá měření budící síly, ostatní úkoly, vlastnosti a skladba měřicího systému jsou obdobné jako u postupu FVT (viz kap. A.1.2).

Při využití dopravního proudu jako zdroje budící síly je volba polohy bodů sítě, ve které se provádí měření, omezena na místa, po kterých se nepohybují vozidla (body lze umístit na chodníky, římsy, do komory komorového mostu apod.)

Úkolem měřicího systému je zaznamenat měřené signály nesoucí informace o budící síle a vyvolané dynamické odezvě sledované konstrukce z jednotlivých bodů sítě.

Skladba měřicího systému, zejména pak použité snímače ovlivňují frekvenční interval, ve kterém je modální analýza provedena.

Při stanovení frekvenčního intervalu prováděné experimentální modální analýzy je vhodné vycházet z dynamického výpočtu provedeném na modelu zkoumaného mostního objektu. Frekvenční interval musí být dostatečně široký, aby bylo možné zachytit všechny požadované vlastní frekvence a vlastní tvary - například vlastní frekvence patřící do „základního souboru ověřovaných vlastních frekvencí“ podle článku 7.2.1 z ČSN 73 6209 Změna Z1 [2].

Základem měřicího systému jsou snímače kmitů, při experimentální modální se používají absolutní snímače dráhy (výchylky), rychlosti nebo zrychlení.

Odezva mostu na budící sílu se měří v síti zvolených bodů ležících na povrchu konstrukce. Počet bodů pro měření odezvy a jejich umístění musí být zvoleny tak, aby všechny vlastní tvary z měřené frekvenční oblasti bylo možno výstižně zobrazit a popsat. Při vlastním měření se snímače postupně umísťují do jednotlivých bodů zvolené sítě.

Teoreticky je možný i opačný postup, tedy měření dynamické odezvy v jediném místě a postupné buzení v síti zvolených bodů na konstrukci. U mostů se tento postup z praktických důvodů nepoužívá.

Snímače jsou připojeny k zesilovačům (ty mohou být i součástí měřicí ústředny) a odtud signál postupuje k měřicí ústředně. Měřicí ústřednou je zpravidla vícekanálový FFT

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

analyzátor, který během měření i vyhodnocování plní mnoho funkcí, často obsahuje i signální generátor pro budící sílu. FFT analyzátor je založen na algoritmu Rychlé Fourierovy transformace (FFT – Fast Fourier Transform), umožňuje registrované analogové signály ze snímačů z časové oblasti převádět v režimu on-line na digitální signály ve frekvenční oblasti, vyhodnocovat a archivovat hledané přenosové funkce $\mathbf{H_{kS}(if)}$. V dnešní době je FFT analyzátor nahrazován měřicí ústřednou doplněnou výkonným počítačem a měřicím programem, který plní funkci FFT analyzátoru.

A.2.2 Vyhodnocovací systém

Při zpracovávání se změřené signály nejprve převádějí pomocí FFT z časové do frekvenční domény a pak se z nich vyhodnocují tzv. ODS FRF - frekvenční přenosové funkce pro vyhodnocení pracovních tvarů kmitání $\mathbf{ODSH_{kS}(if).}$ Je to, obdobně jako $\mathbf{H_{kS}(if)}$, komplexní funkce skládající se z reálné a imaginární složky, které lze též vyjádřit pomocí amplitudy a fáze. Na rozdíl od $\mathbf{H_{kS}(if)}$ je amplituda $\mathbf{ODSH_{kS}(if)}$ vyjádřena čistě jako amplituda funkce $\mathbf{r_k(if),}$ (dynamická odezva konstrukce (zrychlení, rychlost kmitání, výchylka) v bodě **k** zobrazená ve frekvenční oblasti), kdežto fázový úhel φ je vypočítán obdobně jako pro $\mathbf{H_{kS}(if),}$ kde místo budicí síly $\mathbf{F_s(if)}$ je ve výpočtu použit signál z referenčního bodu $\mathbf{r_R(if).}$

V případě, že nejsou všechny měřené body konstrukce při měření osazeny naráz, ale měření je rozděleno na několik měřicích sestav, obvykle vždy po jednom příčném řezu (viz Obr. A.4) a úroveň budící síly kolísá, jako například v případě dopravního proudu, je nutné jednotlivé měřicí sestavy uvést do stejného měřítka přenásobením koeficientem **SF(if)**

$$SF_j(if) = \frac{\sum_{j=1}^{N} Ar_{Rj}(if)}{N \cdot Ar_{Rj}(if)} \quad , \tag{A.3}$$

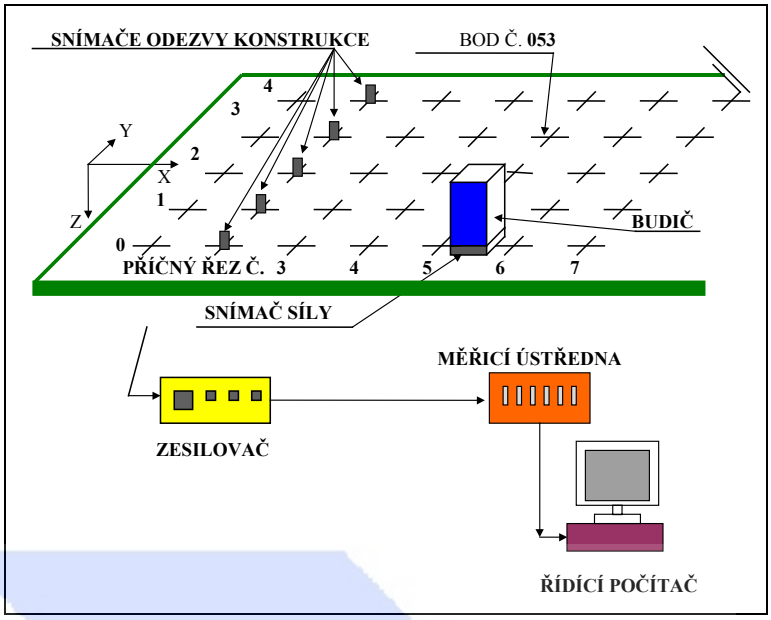
kde **i** je imaginární jednotka, **j** je číslo měřicí sestavy, **N** je počet měřicích sestav, $\mathbf{Ar_{Rj}(if)}$ je amplituda dynamické odezvy konstrukce (zrychlení, rychlost kmitání, výchylka) v referenčním bodě **R** zobrazená ve frekvenční oblasti pro měřicí sestavu **j**.

Vyhodnocení charakteristik vlastního kmitání mostního objektu je obdobné jako pro FVT, pro vyhodnocení se místo přenosových funkcí $\mathbf{H_{kS}(if)}$ použijí přenosové funkce $\mathbf{ODSH_{kS}(if).}$

A.3 Příklad uspořádání experimentální modální analýzy

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

provedené na mostech typu B, C a D (viz Přílohy C, D a E)



Obr. A.5 - Obecné schéma uspořádání měření při modální analýze.

Obr. A.6 - Snímač síly S35 LUKAS

Pro experimentální určení frekvencí vlastního kmitání $\mathbf{f}_{(j)}$, tvarů vlastního kmitání $\{\mathbf{r}_{(j)}\}$ a odpovídajícího útlumu $\mathbf{f}_{b(j)}$ zkoumaného mostu byl zvolen postup Forced Vibration Testing (FVT), který je v literatuře běžně nazýván modální analýza – Modal Analysis (MA).

Uspořádání měření je schématicky vykresleno na obr. A.5. K rozkmitávání mostu byl použit elektrodynamický budič TIRAVIB 5140. Budící síla vyvozovaná budičem byla měřena třemi snímači síly S-35 firmy LUKAS (viz obr. A.6), které byly navzájem propojeny tak, aby přímo udávaly celkovou budící sílu. Odezva mostu na buzení budičem byla měřena jedenácti snímači zrychlení B12/200 firmy Hottinger Baldwin Messtechnik (HBM). K řízení měření byla použita měřicí ústředna VCS 2550B firmy Spectral Dynamic s řídícím počítačem Sun. Tato měřicí ústředna umožňuje v pracovním režimu on line digitalizaci, úpravu, zpracování a uložení dílčích výsledků až ze šestnácti vstupních analogových kanálů.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Při měření budič vyvozoval budící sílu náhodného charakteru. Kmitání budícího závaží bylo typu nízkopásmový bílý šum s frekvenčním rozsahem 0 až 20 Hz (tzn. funkce časového průběhu výchylek závaží převedeného do frekvenční oblasti byla prakticky konstantní ve frekvenčním intervalu 0,5 až 20,0 Hz) a bylo řízeno signálním generátorem SG 450 ONO SOKKI.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Příloha B: Vyhodnocení experimentálně zjištěných hodnot

B.1 Základní soubor srovnávaných charakteristik vlastního kmitání

Rozsah základního souboru srovnávaných charakteristik vlastního kmitání pro konkrétní experiment je potřebné stanovit tak, aby mohlo být dosaženo požadovaných cílů úlohy.

Pokud je shoda mezi experimentálně zjištěnými a vypočtenými charakteristikami vlastního kmitání zkoumaného mostního objektu vyhodnocována na základě ustanovení ČSN 73 6209 Změna Z1 [2], pak základní soubor ověřovaných vlastních frekvencí zahrnuje nejméně pět nejnižších vlastních frekvencí v pořadí podle dynamického výpočtu, které jsou příslušné ke globálním vlastním tvarům nosné konstrukce mostu. Součástí základního souboru musí být současně nejméně dvě nejnižší vlastní frekvence ohybových tvarů kmitání ve svislém směru a alespoň jedna vlastní frekvence torzních tvarů kmitání.

Globálním vlastním tvarem se myslí vlastní tvar, při kterém kmitá celá nebo alespoň podstatná část nosné konstrukce mostu. Za globální vlastní tvar se považuje i vlastní tvar kmitání spojitého nosníku, ve kterém kmitá pouze pole s největším rozpětím.

B.2 Srovnání vlastních frekvencí

Rozdíl mezi srovnávanými vlastními frekvencemi se zpravidla vyjadřuje v procentech.

V ČSN 73 6209 Změna Z1 [2] je pro výpočet odchylek $\Delta_{(j)}$ srovnávaných vypočtených vlastních frekvencí $f_{(j)cal}$ a změřených vlastních frekvencí $f_{(j)obs}$ použit vzorec

$$\Delta_{(j)} = \frac{f_{(j)cal} - f_{(j)obs}}{f_{(j)cal}} \quad 100 \quad [\%]. \tag{B.1}$$

Přípustné mezní odchylky srovnávaných vlastních frekvencí jsou stanoveny v tab. B.1 (viz též ČSN 73 6209 Změna Z1 [2]).

Tab. B.1 Mezní odchylky srovnávaných vlastních frekvencí ze základního souboru

Frekvence [Hz]	$f_{(min)cal}$	$f_{(j)cal}$
Mezní odchylka [%]	< -15 ; +10 >	$\pm b$ b je menší z hodnot $(14 + f_{(j)cal} / f_{(min)cal})$ nebo 25

Kde $f_{(min)cal}$ je minimální vlastní frekvence zkoumaného mostního objektu příslušná ke globálnímu vlastnímu tvaru s dominantními pořadnicemi ve svislém směru.

B.3 Srovnání vlastních tvarů

K vzájemnému porovnání vlastních tvarů je možné použit několik postupů.

Základní porovnání změřených a vypočtených tvarů vlastního kmitání se provádí podle koeficientu korelace modální analýzy $MAC_{(j,k)}$ (modal assurance criterion):

$$MAC_{(j,k)} = \frac{\left(\{r_{(j)}\}_{cal}^{T} \{r_{(k)}\}_{obs}\right)^2}{\left(\{r_{(j)}\}_{cal}^{T} \{r_{(j)}\}_{cal}\right)\left(\{r_{(k)}\}_{obs}^{T} \{r_{(k)}\}_{obs}\right)} \tag{B.2}$$

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

kde $\{r_{(j)}\}_{cal}$ je vektor vypočteného vlastního tvaru a $\{r_{(k)}\}_{obs}$ je vektor odpovídajícího změřeného vlastního tvaru. Při dokonalé shodě porovnávaných vlastních tvarů je $MAC_{(j,k)}$ roven 1, jsou-li navzájem nezávislé, je jejich $MAC_{(j,k)}$ roven 0. Rovnici B.2 lze zjednodušeně chápat jako podmínku ortogonality porovnávaných tvarů vlastního kmitání.

Pomocí koeficientů MAC:

- lze provést porovnání míry shody nebo nezávislosti mezi změřenými a vypočtenými vlastními tvary,
- lze provést přiřazení experimentálně zjištěných vlastních frekvencí sledovaného mostního objektu k ověřovaným vlastním frekvencím (viz ČSN 736209 Změna Z1 [2]), takto vytvořené dvojice vlastních frekvencí se pak porovnají podle vzorce B.1,
- lze provést kontrolu vzájemné nezávislosti naměřených vlastních tvarů, při této kontrole se do vzorce dosazují dva různé naměřené vlastní tvary.

Pozn. Hodnota MAC při ověřování vzájemné nezávislosti porovnávaných vlastních tvarů může být ovlivněna, pokud v těchto tvarech dochází k výraznému kmitání částí konstrukce, na kterých ale není prováděno měření (např. kvůli jejich nepřístupnosti), nebo pokud je měření provedeno v nedostatečně husté síti sledovaných bodů mostního objektu.

K porovnání změřeného a vypočteného vlastního tvaru, které byly navzájem přiřazeny na základě hodnoty MAC, lze použít také koeficienty CAMOSUC, které popisují rozdíl křivosti porovnávaných vlastních tvarů v jednotlivých bodech, ve kterých byly při experimentu vyhodnoceny pořadnice vlastních tvarů:

$$CAMOSUC_{(j,k),x} = \left| \frac{r_{(j)cal,x+1} - 2r_{(j)cal,x} + r_{(j)cal,x-1}}{h^2} - \frac{r_{(k)obs,x+1} - 2r_{(k)obs,x} + r_{(k)obs,x-1}}{h^2} \right|, \quad \text{(B.3)}$$

kde $r_{(j),cal,x}$ je pořadnice j-tého vypočteného vlastního tvaru v x-tém měřeném bodě mostního objektu, $r_{(k),obs,x}$ je pořadnice k-tého změřeného vlastního tvaru v x-tém měřeném bodě mostního objektu, h je rozměr sítě sledovaných bodů ve směru, ve kterém je rozdíl křivosti porovnávaných tvarů vlastního kmitání vyhodnocován.

Pomocí koeficientů CAMOSUC:

- lze provést lokalizaci míst, ve kterých dochází k největším rozdílům mezi porovnávanými vlastními tvary, např. lokalizaci míst, ve kterých se nachází příčina rozdílného chování sledovaného mostního objektu a jeho verifikovaného modelu,
- při dlouhodobém monitorování mostního objektu lze při porovnávání vlastních tvarů změřených v různých etapách monitorování provést lokalizaci míst, ve kterých se nachází příčina změn (např. závada nebo porucha) dynamického chování sledovaného mostního objektu.

Pro potřeby vyhodnocení CAMOSUC je potřebné provést vyhodnocení vlastních tvarů v dostatečně husté síti sledovaných bodů na sledovaném mostním objektu.

K analýze experimentálně zjištěných charakteristik vlastního kmitání lze také použít matici modální poddajnosti [δ]. Ze změřených tvarů vlastního kmitání normalizovaných vzhledem k matici hmotnosti konstrukce lze přímo určit jejich příspěvek k poddajnosti konstrukce.

Matice modální poddajnosti je dána vztahem

$$[\boldsymbol{\delta}] = [\mathbf{R}_{(j)}][\mathbf{1}/\boldsymbol{\omega}^2_{(j)}][\mathbf{R}_{(j)}]^T \quad \text{(B.4)}$$

kde $[\mathbf{R}_{(j)}]$ je modální matice složená z n změřených vlastních tvarů

$$[\mathbf{R}_{(j)}] = [\{\mathbf{R}_{(1)}\},\{\mathbf{R}_{(2)}\}, \ldots\ldots\ldots, \{\mathbf{R}_{(n)}\}] \quad \text{(B.5)}$$

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

a $[\mathbf{1}/\boldsymbol{\omega}^2_{(j)}]$ je diagonální matice sestavená z převrácených hodnot druhých mocnin vlastních kruhových frekvencí. Vlastní tvary teoreticky normované vzhledem k matici hmotnosti se z výsledků měření získají jednoduše na základě vztahu

$$\left[R_{(j)}\right] = \sqrt{\omega^2_{(j)}\, Z^{-1}_{ss(j)}}\, \left\{r_{(j)}\right\} \qquad \text{(B.6)}$$

kde $Z_{ss(j)}$ je, pořadnice vlastního tvaru $\{\mathbf{r}_{(j)}\}$ v bodě působení budící síly S.

K porovnání změřených a vypočtených charakteristik vlastního kmitání sledovaného mostního objektu lze použít také změnu diagonálních členů matice modální poddajnosti $[\boldsymbol{\delta}]$:

$$\Delta\delta_r = \delta_{rr,cal} - \delta_{rr,obs}\ , \qquad \text{(B.7)}$$

tedy změnu průhybů konstrukce vyvolanou fiktivní jednotkovou silou působící v bodě r.

K porovnání změřených a vypočtených charakteristik vlastního kmitání, lze použít také křivost změny diagonálních členů matice modální poddajnosti

$$\Delta\delta''_r = \frac{\Delta\delta_{r,x+1} - 2\Delta\delta_{r,x} + \Delta\delta_{r,x-1}}{h^2}\ , \qquad \text{(B.8)}$$

kde $\Delta\delta_{r,x}$ je změna diagonálního členu r matice modální poddajnosti příslušného k měřenému bodu x, h je rozměr sítě sledovaných bodů x ve směru, ve kterém je křivost změny diagonálních členů matice modální poddajnosti vyhodnocována.

Pomocí $\Delta\delta_r$ a koeficientů $\Delta\delta''_r$ lze provést:

- lokalizaci míst, ve kterých dochází k největším rozdílům mezi porovnávanými vlastními tvary, např. lokalizaci míst, ve kterých se nachází příčina rozdílného chování sledovaného mostního objektu a jeho verifikovaného modelu,
- při dlouhodobém monitorování mostního objektu lze při porovnávání vlastních tvarů změřených v různých etapách monitorování provést lokalizaci míst, ve kterých se nachází příčina změn (např. závada nebo porucha) dynamického chování sledovaného mostního objektu.

Pro potřeby vyhodnocení $\Delta\delta_r$ a koeficientů $\Delta\delta''_r$ je potřebné provést vyhodnocení vlastních tvarů v dostatečně husté síti sledovaných bodů na sledovaném mostním objektu.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Příloha C: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostu typu A

Mostem typu A je mostní objekt o jednom poli z podélných dílců z předpjatého betonu s rozpětím do 30 m. Příklad uvádí provedení EMA na silničním mostním objektu montovaném z devíti podélných dílců z předpjatého betonu I 73 doplněných zmonolitňující železobetonovou deskou, který staticky působí jako prostý nosník o rozpětí 29,0 m.

C.1 Popis mostního objektu

Příklad pojednává o modální analýze mostu přes místní komunikaci v Mělníce – Vehlovicích. Tento příklad byl vybrán ze souboru několika vytipovaných mostů kategorie A pro svoji přehlednou konstrukci a dobrý stavební stav. Na mostě byla provedena opakovaná modální analýza. Při hodnocení výsledků modální analýzy a dynamického výpočtu z první zkoušky byl vysloven předpoklad, že u tohoto typu mostů má teplota vliv na modální charakteristiky. Proto bylo provedeno opakované měření v jiném ročním období s cílem ověřit tento předpoklad.

Jedná se o mostní konstrukci ev.č. 9-019 na silnici I/9 Mělník - Česká Lípa. Rozpětí mostu přes místní komunikaci v Mělníce - Vehlovicích („Na Strži") je 29 m. Nosnou konstrukci tvoří prosté pole z devíti nosníků I 73/27 m prodloužených na 30 m, s osovou příčnou roztečí 1,475 m, doplněných zmonolitňující železobetonovou deskou tl. 0,20 m – 0,33 m z betonu B330. Ložiska jsou hrncová, 1250 kN, NGe 8 ks, NGa 8 ks, N 1 ks. Na opěrách je krajní ložisko kotveno. Římsy jsou z římsového prefabrikátu RP600.

C.2 Experimentální modální analýza

Experimentální modální analýza byla provedena ve dvou etapách. V 1. etapě při teplotě vzduchu cca 0º C a v 2. etapě při teplotě cca 25º C. V obou etapách byla modální analýza provedena stejnými prostředky. Zatěžování bylo provedeno s jednak použitím elektro-hydraulického budiče kmitání s náhodným a harmonickým průběhem budicí síly, jednak při zatížení impulsem síly. Umístění budiče i padostroje na mostě bylo v obou etapách měření stejné. Cílem zkoušek byla modální analýza konstrukce pro ověření dynamického výpočtu a získání podkladů pro posouzení vlivu teploty okolí a způsobu zatěžování na získané výsledky.

Způsoby zatěžování:

- **Náhodné buzení -** Modální analýza byla provedena v pásmu frekvencí od 1 Hz do 30 Hz. Při zpracování bylo podle nastavených kritérií identifikováno 17 možných vlastních tvarů kmitání mostu. Na základě jejich porovnání s tvary kmitání při jiných typech buzení byla sestavena řada 15 tvarů kmitání. Deset z nich bylo zjištěno při použití náhodného buzení.
- **Buzení periodickým signálem s plynule proměnnou frekvencí -** Při použití tohoto typu buzení „frequency sweep“ má budicí síla harmonický průběh s konstantní amplitudou budicí síly a plynule rostoucí a potom klesající frekvencí v pásmu od 1 Hz do 20 Hz. Celý cyklus buzení trvá cca 20 s a potom se opakuje. Absolutní velikost vibrací mostu je vyšší než při použití náhodného signálu. Z přenosových funkcí mezi odezvou mostu a budicí silou bylo opět vyhodnoceno 17 frekvencí.
- **Buzení konstrukce silou s přerušovaným harmonickým průběhem -** Časový průběh budicí síly byl složen ze dvou částí - první část tvořila harmonická síla s frekvencí 5 Hz a konstantní amplitudou (trvala 10 s), druhá část byla pauza. Trvala 15 s. Potom se celý cyklus opakoval. Výsledky nebyly pro daný účel uspokojivé. Konstrukce i po přerušení zatěžování kmitala s frekvencí původní budicí síly až do

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

zahájení dalšího cyklu. Pro vyhodnocení vlastností mostu nebyly výsledky těchto měření použity.

- **Harmonické buzení -** V dvou řezech půdorysu mostu byla měřena odezva při buzení silou s harmonickým průběhem ve svislém směru. Amplituda pohybu hmoty budiče byla konstantní, frekvence se měnila po krocích 0,05 Hz v pásmu od 3,6 Hz do 5,2 Hz v blízkém okolí předpokládané první a druhé vlastní frekvence. Stanovení vyšších tvarů tohoto mostu při buzení harmonickou silou s konstantní frekvencí nebylo z časových důvodů provedeno.
- **Buzení impulsem síly -** Měření byla provedena ve dvou stejných řezech jako v předchozím případě. Cílem bylo nalezení vlastních frekvencí a poddajnosti. Hledal se také vhodný způsob záznamu. Z naměřených časových průběhů odezvy byly vyhodnoceny přenosové funkce H1 mezi výchylkou v místech měření a působící silou.

Všechny výsledky měření jsou shrnuty v tab. C.1.

Tab. C.1 Změřené vlastní frekvence kmitání mostu

Označení tvaru	Budič náhodná síla		Budič „frequency sweep“		Budič harmonické buzení		Padostroj impulsní zatížení		Výpočet „*most4t*“		Popis
	Frekvence [Hz]	Poměrný útlum [%]	Frekvence [Hz]	Poměrný útlum [%]	Frekvence [Hz]	Poměrný útlum [%]	Frekvence [Hz]	Poměrný útlum [%]	Frekvence [Hz]	Poměrný útlum [%]	
1	4,199	3,03	4.020	4,09	4,0		4,25		3,961	1,59	Ox1
2	4,873	2,54	4,774	3,94	4,7		4,87		5,242	1,59	Ky1
3	8,241	2,80	8,218	2,52			8,38		9,0	1,59	Oy1
4			8,49	3,75							Ox3+Oy1
5	14,11	5,81	14,18	4,84			14,3		16,494	1,59	Ky2
6	14,32	2,25									Kx2+Ky2
7	14,32	2,25									
8			14,32	2,25							
9	16,04	2,61									Ox2+Ky2
10	17,38	1,72	17,31	1,87			17,88		15,312	1,59	Ox2+Oy1
11	19,40	3,20					19,75				Ox2+Ky2
12	22,31	1,77	22,3	2,00			22,3				Oy2+Ky2
13	23,27	2,97	23,17	3,12			23.8				Oy3+Ox2
14			26,056	2,16							Oy3+Ox3
15	29,43	2,29					29,75				

C.3 Teoretický výpočet

Před provedením EMA v 1. etapě měření byly již známé výsledky předběžného dynamického výpočtu několika variant výpočtového modelu mostu pro různé kombinace fyzikálních vlastností materiálů použitých při stavbě mostu (závislých na teplotě nebo čase). Ty byly porovnány s výsledky EMA v 1. a v 2. etapě měření. Po vyhodnocení experimentálních a teoretických dynamických charakteristik byly původní teoretické modely ***most4*** a ***most5*** upraveny na modely ***most4t*** a ***most5t***, které se od předcházejících modelů lišily hodnotou modulu pružnosti asfaltobetonové vozovkové vrstvy:

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

most4t - který byl odvozen z modelu ***most4*** (charakteristiky železobetonu podle dokumentace pro stáří konstrukce 1 rok) s použitím modulu pružnosti asfaltobetonové vozovkové vrstvy pro její skutečnou teplotu v obě měření;

most5t - který byl odvozen z modelu ***most5*** (charakteristiky železobetonu upraveny ve prospěch zvýšení tuhosti betonu, které odpovídá stáří konstrukce, možným odchylkám rozměrů prvků) s použitím modulu pružnosti asfaltobetonové vozovkové vrstvy pro její skutečnou teplotu v době měření.

Vypočtené vlastní frekvence kmitání mostu jsou uvedeny v tab. C.2.

Dále byl proveden výpočet vynuceného kmitání pro harmonickou budicí sílu 10 kN v místě budiče pro model ***most4t*** a budicí frekvence 3,961 Hz a 5,242 Hz, které jsou nejblíže naměřeným frekvencím.

Tab. C2 Vypočtené vlastní frekvence kmitání mostu

č.	Popis vlastního tvaru kmitání		
	most4t	*most5t*	
$f_{(1)}$	3,961	4,538	základní ohybový tvar okolo příčné osy *x*
$f_{(2)}$	5,242	5,942	kroucení okolo podélné osy *y*
$f_{(3)}$	9,000	10,285	ohybový tvar okolo podélné osy *y*
$f_{(4)}$	14,712	16,748	druhý ohybový tvar okolo příčné osy *x*
$f_{(5)}$	15,312	17,569	vyšší ohybový tvar okolo podélné osy *y*
$f_{(6)}$	16,494	18,715	vyšší ohybový tvar okolo podélné i příčné osy
$f_{(7)}$	20,023	22,861	vodorovné vybočení I nosníků
$f_{(8)}$	21,007	24,157	vyšší ohybový tvar okolo podélné i příčné osy

C.4 Závěr

Na vybrané mostní konstrukci typu A byla provedena opakovaná modální analýza pomocí elektro-hydraulického budiče s harmonickým buzením s plynulou změnou frekvence („frequency sweep“) a náhodným průběhem budicí síly. Pro oba uvedené způsoby buzení bylo nalezeno nejméně 5 tvarů vlastního kmitání velmi blízkých vlastním tvarům vypočteným se shodnými nebo blízkými frekvencemi.

Dále byla provedena měření odezvy při použití budicí síly s harmonickým průběhem. Byla zjištěna dobrá shoda vypočtených i naměřených tvarů vynuceného kmitání při frekvencích blízkých první a druhé vlastní frekvenci. Měření odezvy mostu na impuls síly byla provedena v omezeném rozsahu s cílem stanovit vlastní frekvence při tomto způsobu buzení.

Je prokazatelné, že první vlastní frekvence stanovená modální analýzou nebo přímo měřením přenosové funkce u tohoto typu mostu závisí jak na teplotě konstrukce, tak na velikosti použité síly. Nejnižší hodnoty byly zjištěny při použití harmonického buzení. Změna poddajnosti je prokazatelná pouze u harmonického buzení. Poměrné tlumení roste s amplitudou budicí síly i s teplotou konstrukce, změna však není velká.

Za předpokladu, že na mostě nedošlo v mezidobí mezi 1. a 2. etapou měření k závažné poruše, lze zjištěné změny vlastních frekvencí, tlumení a poddajnosti konstrukce přisuzovat

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

změně vlastností použitých materiálů, způsobené změnou teploty. V průběhu 1. etapy měření byla teplota kolem 0°C, v průběhu 2. etapy okolo 25°C. Hodnoty nejnižší vlastní frekvence, poměrného tlumení a poddajnosti z obou měření jsou uvedeny v tab. C.3. Při všech způsobech měření došlo v 2. etapě měření ke snížení první frekvence minimálně o 10 %. Vzhledem ke způsobu měření a přesnosti použitých metod je možné považovat tuto změnu nejnižší vlastní frekvence za prokázanou. Změna poddajnosti je při malých úrovních buzení zanedbatelná. Změna při měření s padostrojem je pravděpodobně značně ovlivněná způsobem záznamu a vyhodnocení měření. Při harmonickém buzení poklesla v 2. etapě měření na 70 %. Současně vzrostlo tlumení. Nárůst poměrného útlumu indikuje také jeho změna při použitá budiče s náhodnou silou.

Tab. C.3 Vypočtené vlastní frekvence kmitání mostu

Měření	**1. etapa měření** (0°C)			**2. etapa měření** (25°C)		
	F_1 **[Hz]**	**Poměrný útlum [%]**	**H1 amplituda [m/GN]**	f_1 **[Hz]**	**Poměrný útlum [%]**	**H1 amplituda [m/GN]**
Impuls síly	4.75	2.60	(22)	4,25		27,8
Budič: náhodná síla	4.64	2.43	33	4,14	3,03	34,5
Budič: harmonická síla	4,60		26	3.97		18,3

Tab. C.4 ukazuje srovnání výsledků teoretického výpočtu vlastních frekvencí a tvarů kmitání v 1. etapě měření (0°C , výpočtové modely ***most4*** a ***most5***) a ve 2. etapě měření (25°C, pro modely ***most4t*** a ***most5t***) pro první tři tvary kmitání.

Tab. C.4 Vliv teploty na vlastní frekvence jednotlivých výpočtových modelů

f_k [Hz]	1.etapa (0°C)	2.etapa (25°C)
	most4	***most4t***
f_1	4,03	3,96
f_2	5,38	5,24
f_3	9,57	9,0
	most5	***most5t***
f_1	4,60	4,538
f_2	6,07	5,942
f_3	10,8	10,285

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Z provedené modální analýzy mostů typu A byla získána řada praktických poznatků o vlivu teploty na dynamické chování mostních konstrukcí a o modelování daného typu mostní konstrukce. Byla porovnána vhodnost a účinnost různých způsobů buzení. Dobrá shoda vypočtených a naměřených tvarů vlastního kmitání byla zjištěna při použití budící síly s harmonickým průběhem. Z porovnání výsledků výpočtu a experimentu byla potvrzena změna dynamického chování v důsledku změny teploty. V daném případě byl most typu A experimentálně ověřován při teplotě vzduchu okolo 0°C a okolo 25°C. Při teplotě okolo 25°C došlo ke snížení první vlastní frekvence minimálně o 10 %.. Jednalo se jednoznačně o vliv teploty především na vozovkové a izolační souvrství.

Z vyšetřování tohoto typu mostu vyplývá poznatek, že při tvorbě teoretického modelu, který má být použit pro výpočet dynamických charakteristik mostu, je nutné modelovat vhodným způsobem vozovkové a izolační souvrství. Tuhost tohoto souvrství je závislá na teplotě a nezanedbatelným způsobem ovlivňuje vypočtené dynamické charakteristiky.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Příloha D: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostě typu B

D.1 Popis zkoušeného mostního objektu

Jako reprezentant mostního objektu typu B (mostní objekt o více polích z monolitického předpjatého betonu do max. rozpětí pole 42,0 m) byl vybrán most, který převádí přes dálnici D5 silnici III/20314 vedoucí z Heřmanovy Huti do Sytna.

Nosnou konstrukci mostu tvoří deska z předpjatého betonu o celkové šířce 9,8 m, která má ve střední části v šířce 5,9 m tloušťku 0,825 m a na okrajích náběhy o délce 1,95 m s lineární změnou tloušťky na hodnotu 0,288 m v místě pod chodníkem a 0,257m v místě pod římsou se svodidlem. Staticky působí jako spojitý nosník o čtyřech polích (14,0 m + 18,5 m + 18,5 m + 14,0 m). Most je šikmý, úhel šikmosti je 60,1963 deg.

D.2 Experimentální modální analýza (EMA) provedená na mostu v Heřmanově Huti

D.2.1 Popis uspořádání EMA

Základním cílem EMA mostu přes dálnici D5 v Heřmanově Huti bylo určit jeho modální charakteristiky (frekvence vlastního kmitání $\mathbf{f_{(j)}}$, tvary vlastního kmitání $\mathbf{\{r_{(j)}\}}$ a jim odpovídající útlum $\mathbf{f_{b(j)}}$).

Popisované měření se uskutečnilo v květnu roku 2003. Během vlastního měření bylo skoro jasno, teplota vzduchu byla na počátku měření 28,3°C. V průběhu měření bylo sledování teploty vzduchu znehodnoceno osluněním teploměru, který teplotu vzduchu zaznamenával.

Vedle teploty vzduchu byla sledována teplota povrchu asfaltového krytu v místě, které bylo střídavě osluněné a zastiňované bloudícím stínem svodidla (teploměr t1 – měřené místo leželo zhruba uprostřed mezi body 49 a 59 (viz obr. D.1), teploměr t2 – zhruba uprostřed mezi body 129 a 139) a v místě trvale osluněném (teploměr t0 – umístěn v blízkém okolí bodu 26, zde bylo sledování teploty prováděno až v poslední čtvrtině měření) a spodního líce nosné betonové desky mostu (teploměr t3 – umístěn zhruba v oblasti pod body 16 a 17, teploměr t4 – umístěn zhruba v oblasti pod body 12 a 13).

Tab. D.1 - Most přes dálnici D5 v Heřmanově Huti – Průběh teploty v jednotlivých sledovaných místech konstrukce během měření modálních charakteristik mostu.

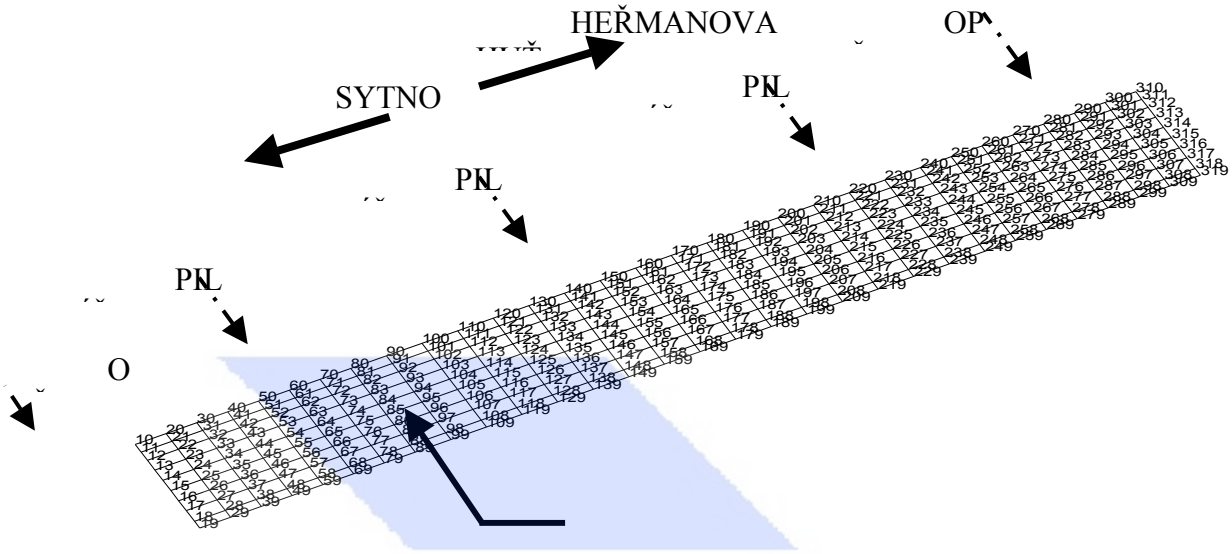
Odezva mostu měřena v řezu	Čas měření teploty	Teplota povrchu asfaltu			Teplota spodního líce betonové desky	
		t1 [°C]	t2 [°C]	t0 [°C]	t3 [°C]	t4 [°C]
31 - opěra 4	13:57	23.4	21.7	x	21.1	20.8
24 - pilíř 3	14:37	23.6	21.9	x	21.6	21.2
16 - pilíř 2	15:27	23.8	22.1	x	22.0	21.7
08 - pilíř 1	16:27	23.9	22.5	x	22.3	21.9
01 - opěra 0	17:17	24.0	22.5	38.8	22.4	22.0

K rozkmitávání konstrukce byl použit budič, který byl na mostě umístěn v oblasti vymezené body 107, 108, 217 a 218 (viz obr. D.1) a který nosnou konstrukci mostu rozkmitával svislou budící silou náhodného charakteru.

Dynamická odezva mostu na budící sílu byla měřena ve zvolené síti bodů na jeho horním povrchu (na vozovce, chodníku a římse). Celkový počet bodů sítě byl 310 (31

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

příčných řezů, 10 bodů v každém příčném řezu), schéma jejich číslování a rozmístění na konstrukci je vykresleno na obr. D.1. Snímači odezvy se vždy osazovaly body sítě na jednom celém příčném řezu. Kmitání mostu bylo ve všech bodech sítě měřeno ve svislém směru a v ose mostu (v bodech x5) také ve směru vodorovné podélné osy mostu (ve směru osy x).



Obr. D.1 - Schéma uspořádání a číslování sítě měřených bodů

Měřená odezva mostu byla řídícím počítačem v režimu on line částečně zpracována, pro každý bod sítě byla vyhodnocena přenosová funkce $\mathbf{H_{rS}(if)}$ (v měřítku inertance)

$$H_{rs}(if) = \frac{\text{[illegible]}}{F_s(if)}, \qquad \text{(D.1)}$$

kde **i** je imaginární jednotka, $\mathbf{w_r(if)}$ je odezva konstrukce v měřítku zrychlení v bodě **r** zobrazená ve frekvenční oblasti, která byla vyvolána budící silou $\mathbf{F_s(if)}$ působící v bodě **S**. Hodnoty přenosových funkcí $\mathbf{H_{rS}(if)}$ se při měření v jednotlivých bodech určovaly jako průměr z 8 měření s překrytím oken 0%. Délka okna zpracovávaného časového signálu byla 32 s, frekvenční rozsah okna byl nastaven na 50 Hz. Příklady změřených přenosových funkcí jsou vykresleny na obr. D.1 a obr. D.2.

Vyhodnocení modálních charakteristik probíhalo off line pomocí speciálního programu - programu STAR firmy Spectral Dynamic.

D.2.2 Výsledky EMA

Při EMA mostu přes dálnici D5 v Heřmanově Huti bylo celkem vyhodnoceno 9 vlastních frekvencí $\mathbf{f_{(j)}}$ (viz tab. D.2), jim odpovídající vlastní tvary $\mathbf{\{r_{(j)}\}}$ (popis charakteru vyhodnocených vlastních tvarů je uveden v tab. D.2, příklady vyhodnocených vlastních tvarů jsou vykresleny na obr. D.4 až obr. D.10) a útlum $\mathbf{f_{b(j)}}$ (viz tab. D.2).

V buzené frekvenční oblasti do 20 Hz bylo vyhledáno 6 vlastních frekvencí. Funkce vyhodnocovacího programu umožnily vyhodnotit i 3 vlastní frekvence ve frekvenčním intervalu 20 až 25 Hz, který nebyl buzen, hodnoty těchto vlastních frekvencí a také pořadnic příslušných vlastních tvarů jsou vzhledem k charakteru změřených přenosových funkcí

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

v tomto frekvenčním intervalu (viz. obr. D.2 a obr. D.3) zatíženy větší chybou než modální charakteristiky v buzené oblasti.

Vzájemná nezávislost vyhodnocených tvarů vlastního kmitání byla ověřena pomocí koeficientů korelace modální analýzy $\mathbf{MAC_{(i,j)}}$ vypočítaných podle vztahu (B.2). Změřené vlastní tvary jsou prakticky ideálně nezávislé, mírné zvýšení hodnoty MAC, které nicméně stále leží v mezích nízké závislosti, vykazují tvary č. 3 a 6 ($\mathbf{MAC_{(3,6)} = 0{,}149}$)

$\mathbf{MAC_{(i,j)}}$ popisuje míru shody dvou porovnávaných tvarů vlastního kmitání $\{\mathbf{r_{(i)}}\}$ a $\{\mathbf{r_{(j)}}\}$ přes všechny jejich pořadnice. Jsou-li dva porovnávané tvary totožné, je příslušný $\mathbf{MAC_{(i,j)}}$ roven 1, jsou-li navzájem nezávislé, je jejich $\mathbf{MAC_{(i,j)}}$ roven 0. Rovnici (B.2) lze zjednodušeně chápat jako podmínku ortogonality porovnávaných tvarů vlastního kmitání, přesně by to platilo pouze v případě konstrukce, jejíž teoretická matice hmotnosti odpovídající porovnávaným vlastním tvarům by byla diagonální a její diagonální členy by byly shodně veliké.

Tab. D.2 - Most přes dálnici D5 v Heřmanově Huti – vyhodnocené frekvence vlastního kmitání $\mathbf{f_{(j)}}$, charakteristiky útlumu a popis charakteru odpovídajících vlastních tvarů.

Poř. č. (j)	Vlastní frekvence	Frekvence útlumu	Logarit. dekrement útlumu	Poměrný útlum	Popis charakteru vlastního tvaru
	$f_{(j)}$ [Hz]	$f_{b(j)}$ [Hz]	$\vartheta_{b(j)}$	$b_{r(j)}$	
(1)	6.02	0.056	0.058	0.009	1. tvar svislého ohybového kmitání
(2)	7.56	0.124	0.103	0.016	2. tvar svislého ohybového kmitání
(3)	9.69	0.266	0.172	0.027	Nelze jednoznačně charakterizovat
(4)	10.90	0.510	0.294	0.047	Tvar kroutivého kmitání
(5)	11.29	0.327	0.182	0.029	Nelze jednoznačně charakterizovat
(6)	13.32	0.700	0.330	0.053	Nelze jednoznačně charakterizovat
(7)	20.39	0.728	0.224	0.036	Tvar svislého ohybového kmitání
(8)	21.82	0.711	0.205	0.033	Tvar kroutivého kmitání
(9)	24.21	0.627	0.163	0.026	Tvar kroutivého kmitání

Tab. D.3 - Most přes dálnici D5 v Heřmanově Huti – porovnání vyhodnocených vlastních tvarů pomocí korelačního koeficientu modální analýzy $\mathbf{MAC_{(i,j)}}$ - výpočet proveden pouze z reálných složek vlastních tvarů.

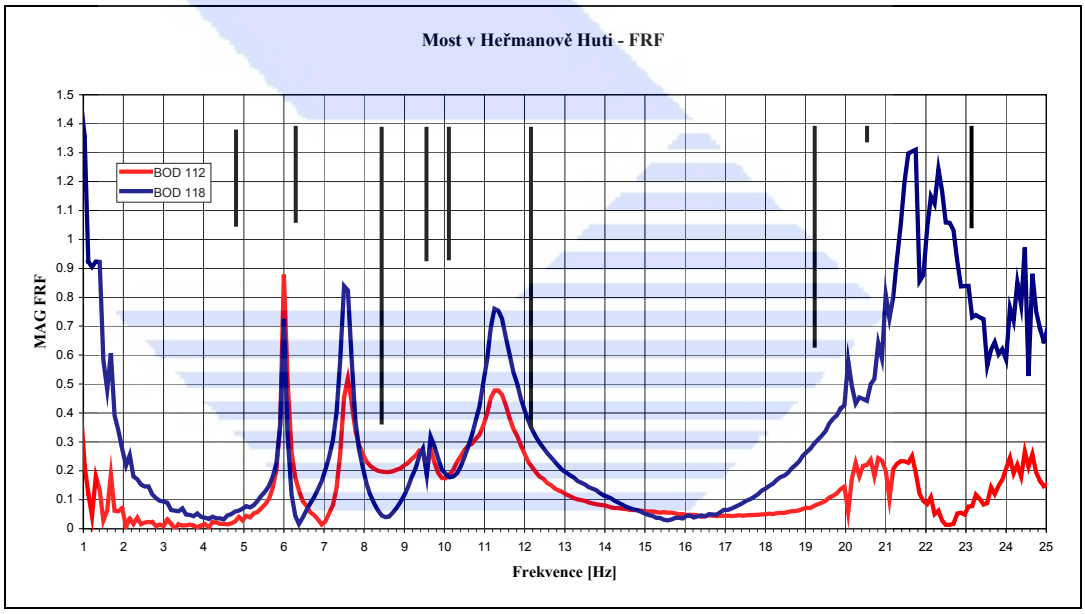
Číslo (i)	Číslo porovnávaného vlastního tvaru (j)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.002	0.001	0.000
2		1	0.005	0.000	0.002	0.001	0.001	0.001	0.003
3			1	0.059	0.003	0.149	0.001	0.001	0.000
4				1	0.003	0.018	0.003	0.001	0.000
5					1	0.059	0.001	0.006	0.000
6		SYMETRIE				1	0.001	0.000	0.000
7							1	0.090	0.000
8								1	0.070
9									1

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Tab. D.4 - Most přes dálnici D5 v Heřmanově Huti – porovnání vyhodnocených vlastních tvarů a vypočtených vlastních tvarů (model C) pomocí korelačního koeficientu modální analýzy $\mathbf{MAC_{(i,j)}}$.

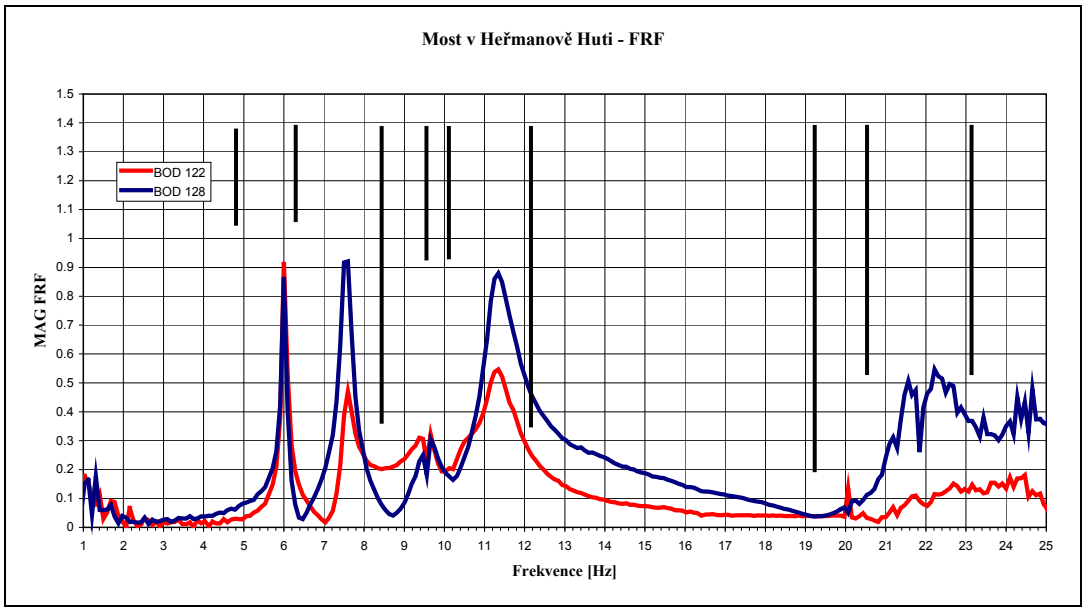
Číslo experiment. vl. tvaru (i)	Číslo vypočteného vlastního tvaru (j)					
	1	2	3	4	5	6
1	0.996	0.382	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.002	0.989	0.000	0.016	0.001
3	0.000	0.339	0.001	0.923	0.024	0.041
4	0.001	0.023	0.001	0.017	0.879	0.053
5	0.001	0.077	0.001	0.013	0.023	0.765
6	0.000	0.000	0.003	0.074	0.022	0.008

Z měření ve směru vodorovné podélné osy mostu (ve směru osy x) se nepodařilo jednoznačně vyhodnotit vlastní frekvenci, která by nebyla uvedena v tab. D.2 a ke které by nepatřil tvar s dominantním kmitáním ve svislém směru.

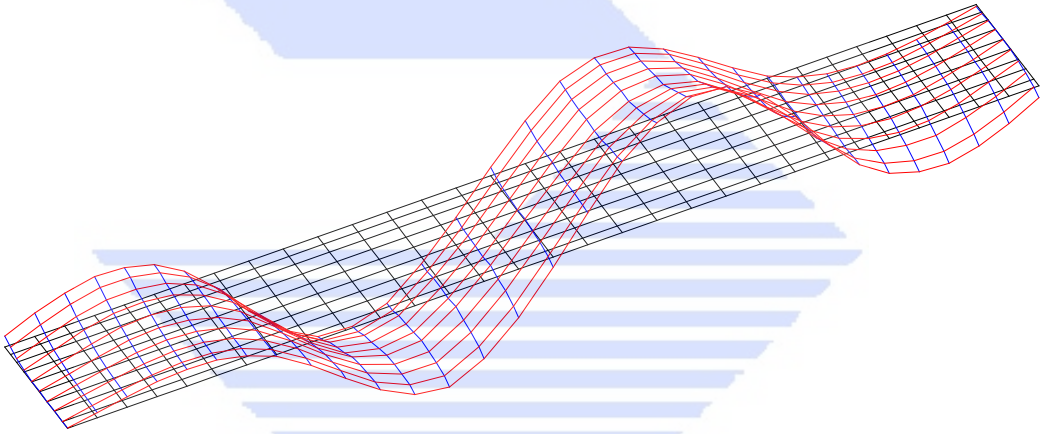


Obr. D.2 - Přenosové funkce změřené v bodech 112 a 118.

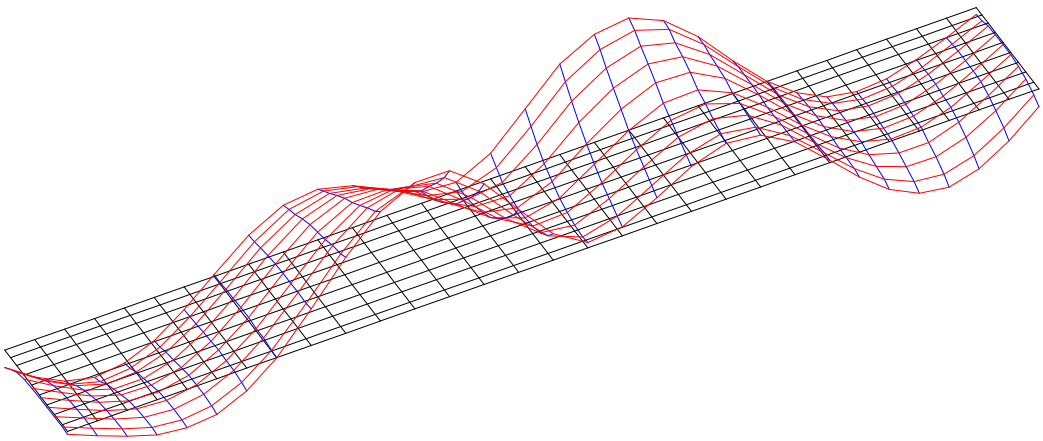
Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. D.3 - Přenosové funkce změřené v bodech 122 a 128.

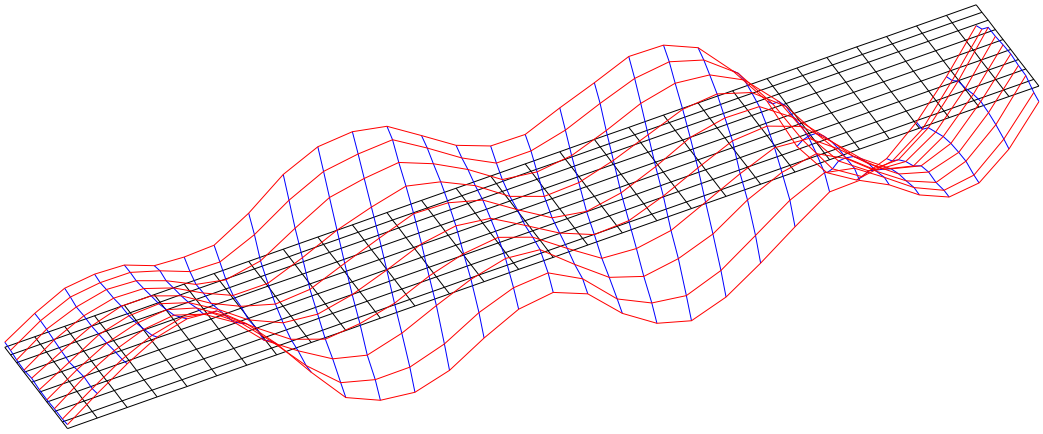


Obr. D.4 - Reálná složka 1. tvaru vlastního kmitání, $\mathbf{f_{(1)}}$ = 6,02 Hz.

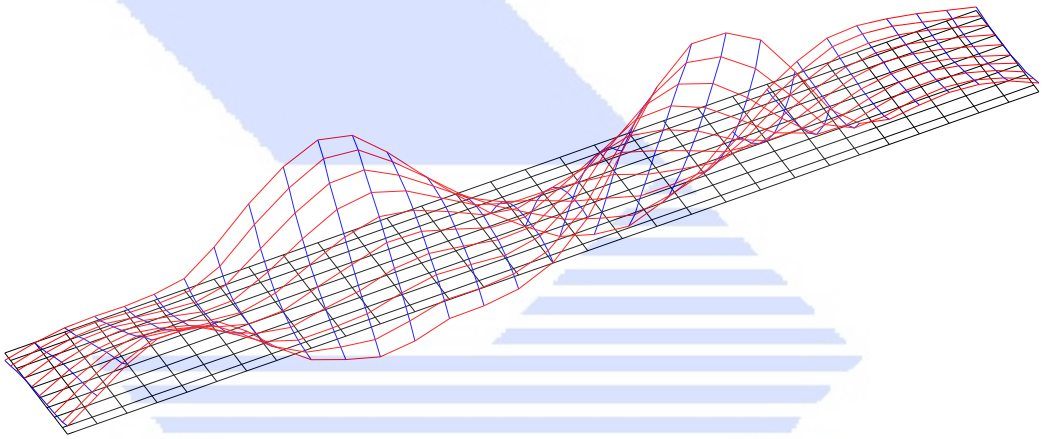


Obr. D.5 - Reálná složka 2. tvaru vlastního kmitání, $\mathbf{f_{(2)}}$ = 7,56 Hz.

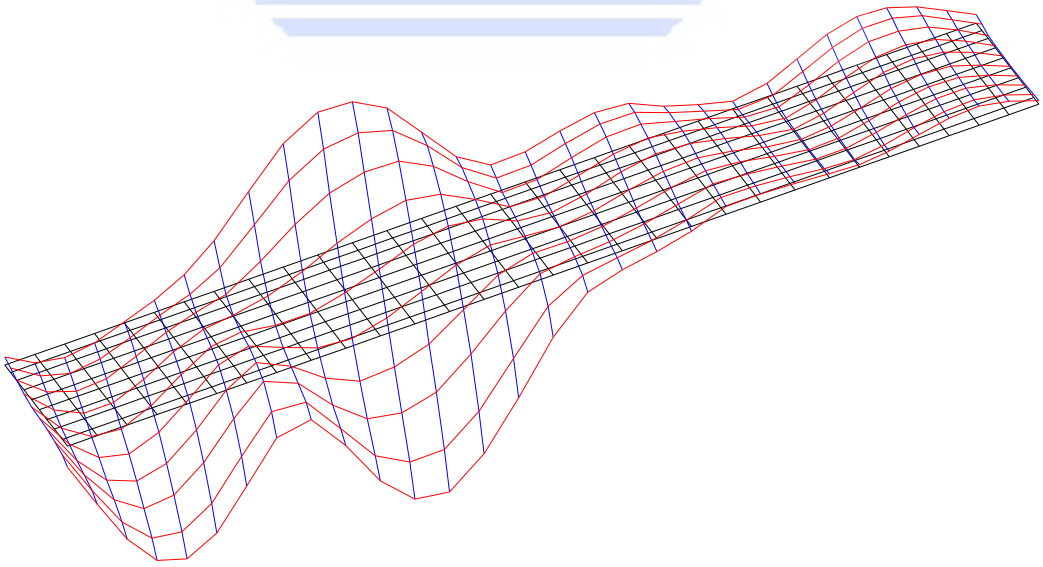
Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. D.6 - Reálná složka 3. tvaru vlastního kmitání, $\mathbf{f_{(3)}}$ = 9,69 Hz.

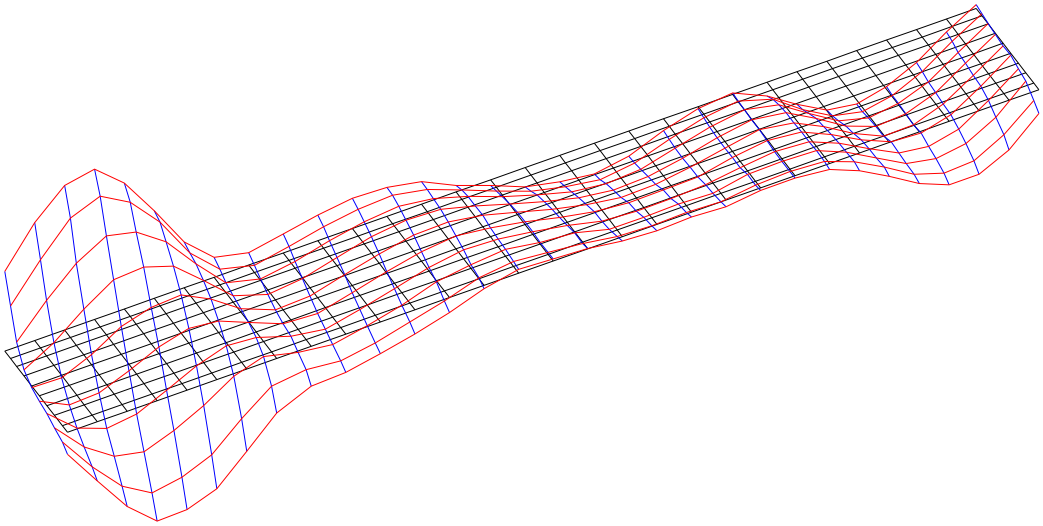


Obr. D.7 - Reálná složka 4. tvaru vlastního kmitání, $\mathbf{f_{(4)}}$ = 10,90 Hz.

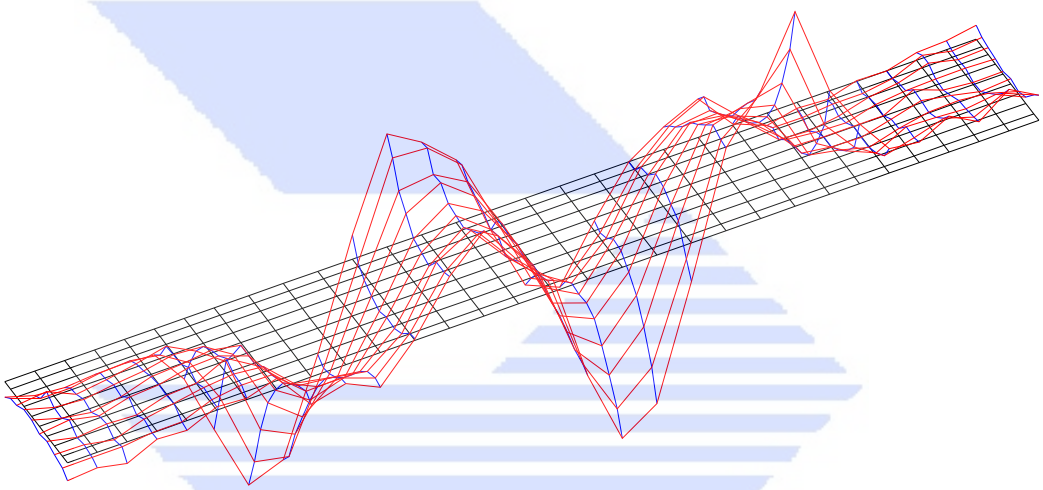


Obr. D.8 - Reálná složka 5. tvaru vlastního kmitání, $\mathbf{f_{(5)}}$ = 11,29 Hz.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. D.9 - Reálná složka 6. tvaru vlastního kmitání, $\mathbf{f_{(6)}}$ = 13,32 Hz.



Obr. D.10 - Reálná složka 7. tvaru vlastního kmitání, $\mathbf{f_{(7)}}$ = 20,39 Hz.

D.2.3 Změna 1. a 2. vlastní frekvence v průběhu měření

Z údajů získaných během popsaného experimentu byl vyhodnocen vliv změny teploty na dynamické vlastnosti sledované konstrukce.

Při měření byla odezva mostu měřena postupně řez za řezem od konce mostu (řez 31) až k jeho začátku (řez 01). V tab. D.1 jsou uvedeny časy měření v řezech ležících nad jednotlivými podporami mostu a odpovídající teploty ve sledovaných bodech konstrukce.

V tab. D.5 jsou uvedeny hodnoty 1. a 2. vlastní frekvence mostu, které byly vyhodnoceny z přenosových funkcí změřených vždy pouze v jediném poli mostu (tzn. v časovém intervalu a rozmezí teplot konstrukce popsaných v tab. D.1).

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Tab. D.5 - Most přes dálnici D5 v Heřmanově Huti – 1. a 2. frekvence vlastního kmitání a frekvence útlumu, které byly vyhodnoceny z odezvy změřené v jednotlivých polích mostu.

Odezva měřená v poli	$f_{(1)}$		$f_{(2)}$	
	+/- 0.001 Hz		+/- 0.001 Hz	
	$f_{(1)}$ [Hz]	$f_{b(1)}$ [Hz]	$f_{(2)}$ [Hz]	$f_{b(2)}$ [Hz]
4. pole mostu	6.007	0.054	7.535	0.121
3. pole mostu	6.020	0.055	7.554	0.124
2. pole mostu	6.026	0.058	7.567	0.126
1. pole mostu	6.027	0.057	7.566	0.127

D.3 Teoretický model

Pro zkoumaný most v Heřmanově Huti byly sestaveny celkem tři varianty modelu (model A, B a C).

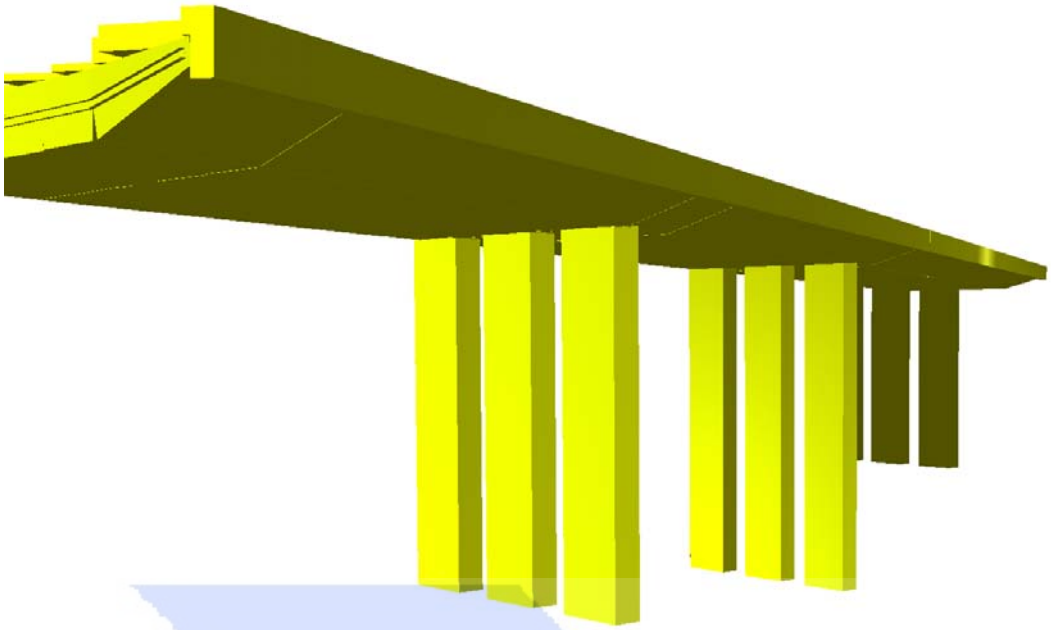
Výpočty provedené na variantě modelu A byly využity při přípravě EMA. Na základě vypočtených vlastních frekvencí a vlastních tvarů byl stanoven frekvenční rozsah experimentu, počet bodů, ve kterých bylo provedeno měření, a poloha budícího bodu.

Zbývající dvě varianty modelu mostu vznikly pomocí verifikace výpočtového modelu na základě výsledků EMA.

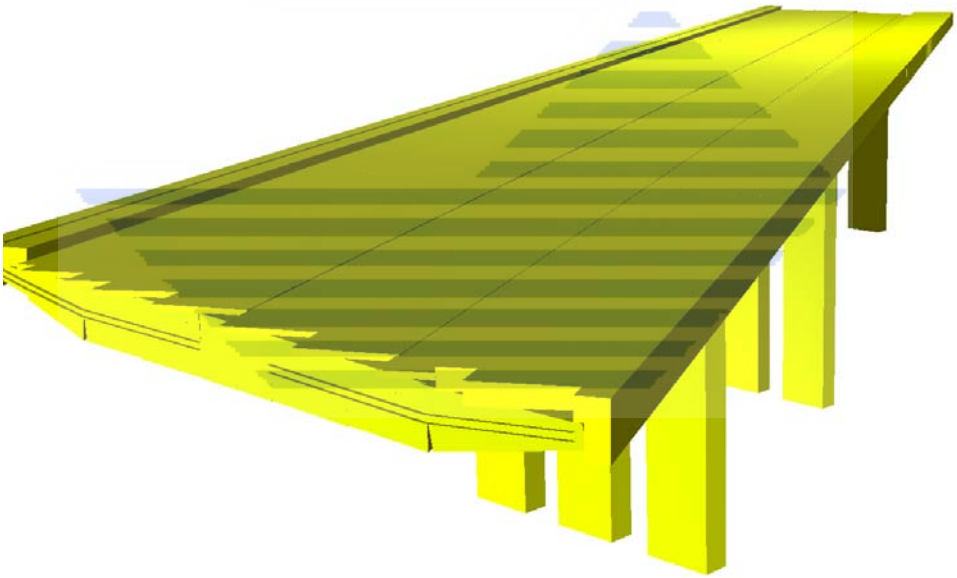
D.3.1 Popis modelu

Výpočtový model byl vytvořen v programu NEXIS 32. Jednalo se o prostorový model s použitím deskostěnových a prutových prvků. Pilíře a deska mostovky byly modelovány plošnými prvky. Předpínací kabely, vozovkové souvrství, chodníky a římsy byly modelovány prutovými prvky, vloženými excentricky do desky mostovky. Všechny geometrické charakteristiky byly zadány podle projektové dokumentace a podle provedeného ověření konstrukce. Ohybová tuhost vrubového kloubu v místě spojení pilířů a desky mostovky byla vypočtena 450 MNm/rad/m. Pilíře byly v patě uvažovány vetknuté. Na opěrách byla deska mostovky uložena kloubově. Vzhledem k tomu, že budící síla byla v porovnání s únosností konstrukce velmi malá a nemohla tedy překonat třecí sílu v ložiskách, tak byl podélný posun na opěrách zamezen. Tloušťka desky v ose se z důvodu výškového zakřivení mění v rozmezí ±20 mm, proto byla zadána rozdílně na jednotlivých makroprvcích. Vnitřní část desky měla na makrech tloušťku konstantní, na chodníkových konzolách byla proměnná. Svodidla a zábradlí byly zadány jako spojité liniové hmoty. Budič byl zadán jako osamělá hmota o váze 1400 kg.

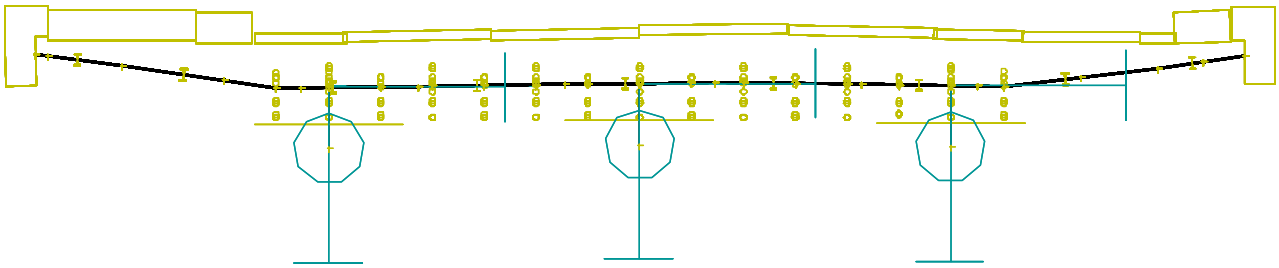
Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr.D.11 - Render modelu

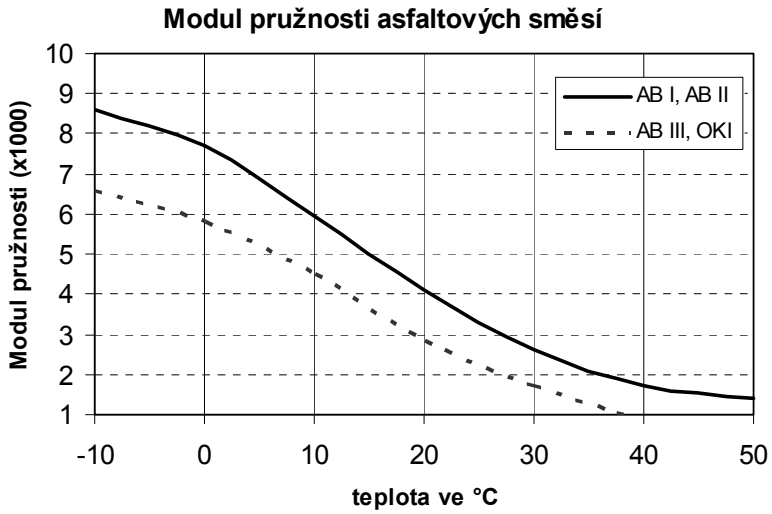


Obr.D.12 - Render modelu



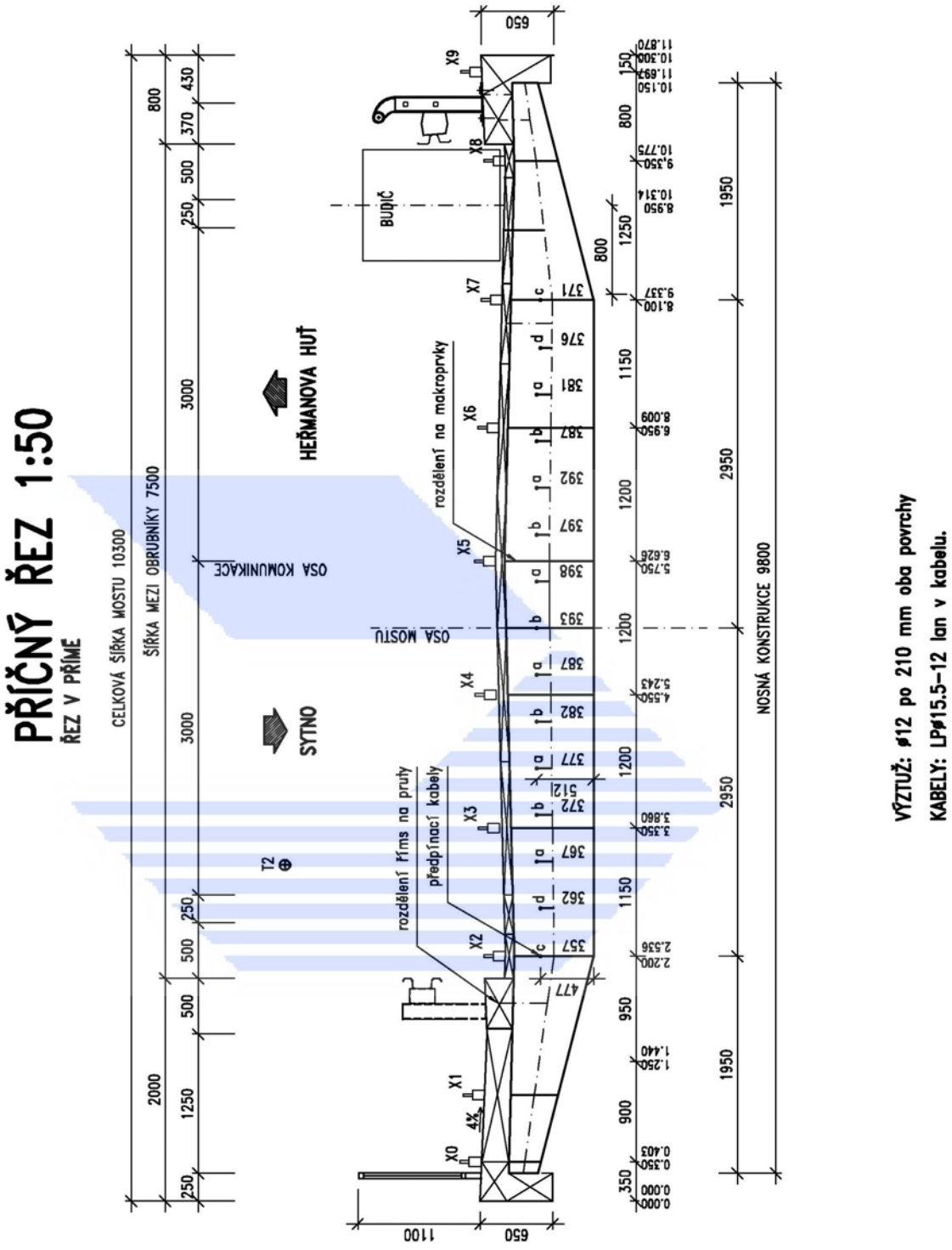
Obr.D.13 - Příčný řez modelem, kabely, římsy a vozovka

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



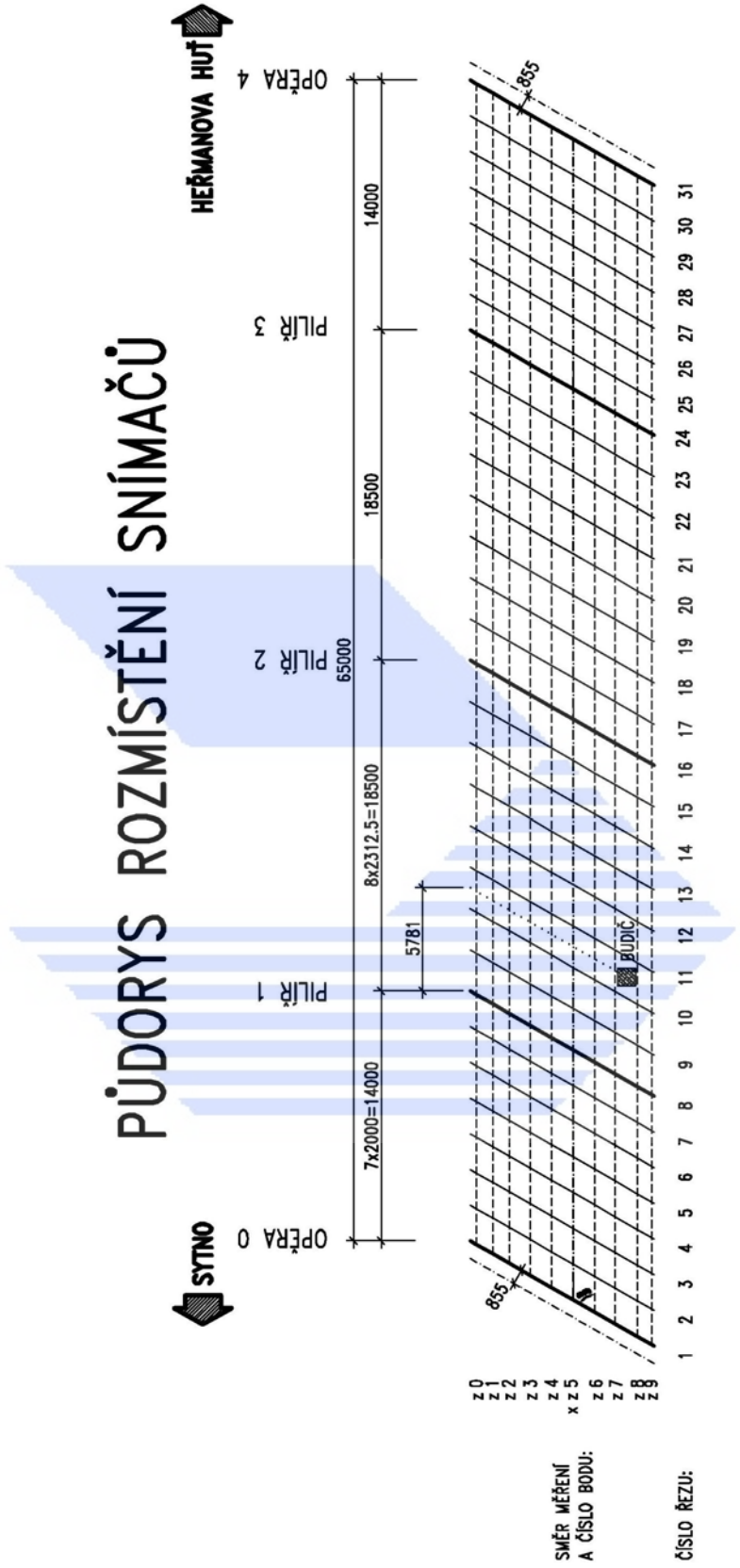
Obr. D.14 - Modul pružnosti asfaltových směsí v závislosti na teplotě

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. D.15 - Příčný řez

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. D.16 - Půdorys mostu

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Celkový modul pružnosti betonu C30/37 desky mostovky byl v době statické zatěžovací zkoušky, která se konala v roce 1997, E_c = 37 500 MPa. Modální analýza byla na zkoumaném mostním objektu provedena v roce 2003 tedy 6 let po statické zatěžovací zkoušce. Vlivem stárnutí se tedy změnil modul pružnosti betonu na hodnotu cca 40 600 MPa (podle metodiky prof. Křístka). Do modulu pružnosti betonu pilířů byla započítána betonářská výztuž, normová průměrná hodnota 32 000 MPa se tedy zvýšila na 34 200 MPa.

Přepínací výztuž byla v modelu zohledněna pomocí excentrických prutů kruhového průřezu odpovídajícího ploše 1 kabelu z 12 lan Lp 15,5 – 1800, tj. 12*150=1800 mm^2. Kabely byly rozděleny podle způsobu vedení na typ **a, b, c, d**. Příčný řez mostu obsahoval celkem 15 kabelů. Každý kabel byl zadán jako žebro do desky mostovky a byla mu udělena určitá excentricita, která odpovídala jeho skutečné poloze v konstrukci (byla zohledněna jak rozdílná tloušťka konstrukce, tak svislý průběh kabelu v konstrukci). Tato excentricita byla udělena lineárně po úsecích délky 2000 mm v polích č. 1 a 4 a 2312,5 mm v polích č. 2 a 3. Přehled uvažovaných excentricit přepínacích kabelů je patrný z následující tab. D.6.

Tab. D.6 – Model mostu přes dálnici D5 v Heřmanově Huti – přehled uvažovaných excentricit předpínacích kabelů.

Kabel	Typ	Pole 1 a 4							Pole 2 a 3							
1	c	0,037	-0,104	-0,124	-0,124	-0,124	-0,108	0,083	0,080	-0,215	-0,239	-0,239	-0,239	-0,239	-0,239	0,088
2	d	0,032	-0,109	-0,129	-0,129	-0,129	0,081	0,152	0,152	0,053	-0,244	-0,244	-0,244	-0,244	-0,036	0,171
3	a	0,027	-0,114	-0,134	-0,134	-0,134	-0,118	0,073	0,070	-0,225	-0,249	-0,249	-0,249	-0,249	-0,249	0,078
4	b	0,022	-0,119	-0,139	-0,139	-0,139	0,071	0,142	0,142	0,043	-0,254	-0,254	-0,254	-0,254	-0,046	0,161
5	a	0,017	-0,124	-0,144	-0,144	-0,144	-0,128	0,063	0,060	-0,235	-0,259	-0,259	-0,259	-0,259	-0,259	0,068
6	b	0,012	-0,129	-0,149	-0,149	-0,149	0,061	0,132	0,132	0,033	-0,264	-0,264	-0,264	-0,264	-0,056	0,151
7	a	0,007	-0,134	-0,154	-0,154	-0,154	-0,138	0,053	0,050	-0,245	-0,269	-0,269	-0,269	-0,269	-0,269	0,058
8	b	0,001	-0,140	-0,160	-0,160	-0,160	0,050	0,121	0,121	0,022	-0,275	-0,275	-0,275	-0,275	-0,067	0,140
9	a	-0,004	-0,145	-0,165	-0,165	-0,165	-0,149	0,042	0,039	-0,256	-0,280	-0,280	-0,280	-0,280	-0,280	0,047
10	b	-0,003	-0,144	-0,164	-0,164	-0,164	0,046	0,117	0,117	0,018	-0,279	-0,279	-0,279	-0,279	-0,071	0,136
11	a	0,002	-0,139	-0,159	-0,159	-0,159	-0,143	0,048	0,045	-0,250	-0,274	-0,274	-0,274	-0,274	-0,274	0,053
12	b	0,007	-0,134	-0,154	-0,154	-0,154	0,056	0,127	0,127	0,028	-0,269	-0,269	-0,269	-0,269	-0,061	0,146
13	a	0,013	-0,128	-0,148	-0,148	-0,148	-0,132	0,059	0,056	-0,239	-0,263	-0,263	-0,263	-0,263	-0,263	0,064
14	d	0,018	-0,123	-0,143	-0,143	-0,143	0,067	0,138	0,138	0,039	-0,258	-0,258	-0,258	-0,258	-0,050	0,157
15	c	0,023	-0,118	-0,138	-0,138	-0,138	-0,122	0,069	0,066	-0,229	-0,253	-0,253	-0,253	-0,253	-0,253	0,074

Kotevní napětí v kabelu po dokončení předpínání bylo 1440 MPa, předpokládáme-li ztráty 30%, tak velikost současného napětí lze odhadnout na 1000 MPa. Zadáno bylo jako ochlazení kabelů o 427°C.

D.3.2 Verifikace modelu

Vytvořený výpočtový model byl postupně verifikován tak, aby byla dosažena co nejlepší možná shoda s experimentem. Jak již bylo zjištěno v průběhu předchozích zkoušek provedených v rámci projektu [4], tak na dynamické odezvě konstrukce se podílí také vozovkové a izolační souvrství. Cílem také bylo ověřit vliv předpětí v konstrukci na vlastní tvary a frekvence.

Pro ověření těchto vlivů byly vytvořeny celkem tři modely. Tyto modely se liší způsobem a rozsahem zohlednění vozovkového souvrství a mostního příslušenství (římsy, chodníky) a zohledněním předpětí.

Model A

V tomto modelu byly asfaltové vrstvy a římsy zohledněny pouze jako spojitá hmota, která zatěžuje mostovku. Jejich příspěvek k tuhosti konstrukce zohledněn nebyl. Předpínací kabely byly zohledněny pomocí prutů, umístěných excentricky v místě skutečného průběhu kabelů.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Model B

V tomto modelu byl zohledněn příspěvek asfaltových vrstev a příslušenství k tuhosti konstrukce. To bylo provedeno pomocí prutů, vložených v desce mostovky, které měly udělenou excentricitu. Modul pružnosti asfaltu byl při teplotě cca 20°C uvažován $E_{AB} = 4000$ MPa. Tloušťka souvrství je 80mm. Předpínací kabely byly zohledněny pomocí prutů, umístěných excentricky v místě skutečného průběhu kabelů.

Model C

V tomto modelu byl výpočet proveden s vlivem předpětí. Uvažováno bylo napětí od vlastní tíhy a od předpětí. Předpínací síla v kabelech byla zadána jako jejich ochlazení. Jinak se shodoval s modelem B.

D.3.3 Vypočtené vlastní frekvence

V následující tabulce jsou uvedeny vypočtené vlastní frekvence pro všechny tři uvažované teoretické výpočetní modely.

Tab. D.7 – Vlastní frekvence mostu vypočtené na modelech A, B a C.

Model A		Model B		Model C	
n	Fj [Hz]	n	Fj [Hz]	n	Fj [Hz]
1	5,167	1	5,699	1	5,814
2	6,047	2	6,290	2	6,292
3	6,625	3	7,349	3	7,439
4	8,024	4	8,827	4	8,904
5	9,400	5	10,308	5	10,315
6	9,907	6	10,546	6	10,539
7	10,435	7	11,100	7	11,090
8	13,063	8	14,046	8	14,069
9	13,358	9	14,076	9	14,089
10	14,855	10	15,912	10	15,912
11	17,104	11	18,084	11	18,547
12	17,789	12	18,787	12	18,788
13	18,701	13	18,977	13	20,491
14	19,048	14	19,152	14	20,885
15	19,149	15	20,483	15	21,000
16	19,818	16	20,619	16	21,329
17	20,349	17	21,197	17	22,226
18	21,548	18	23,021	18	23,150
19	25,238	19	27,640	19	27,775
20	26,426	20	28,007	20	28,015

Z porovnání hodnot vlastních frekvencí je zřejmé, že tuhost modelu stoupá postupně od modelu A k modelu C. Shoda jednotlivých modelů s experimentem je popsána v další kapitole.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

D.3.4 Porovnání vypočtených a změřených modálních charakteristik

Vypočtené frekvence a tvary vlastního kmitání byly porovnány s odpovídajícími experimentálně zjištěnými hodnotami za účelem ověření přiléhavosti výpočetního modelu.

V tab. D.8 jsou porovnány změřené vlastní frekvence s odpovídajícími vlastními frekvencemi vypočtenými na jednotlivých modelech a změřené a vypočtené vlastní tvary pomocí koeficientu MAC. Zároveň je uvedena průměrná odchylka frekvencí a průměrný koeficient MAC.

Aby bylo možné porovnat vypočtené vlastní tvary kmitání se změřenými, bylo potřebné u vypočtených tvarů provést redukci na pořadnice v uzlech modelu, které odpovídaly bodům, ve kterých bylo na reálném mostním objektu provedeno měření.

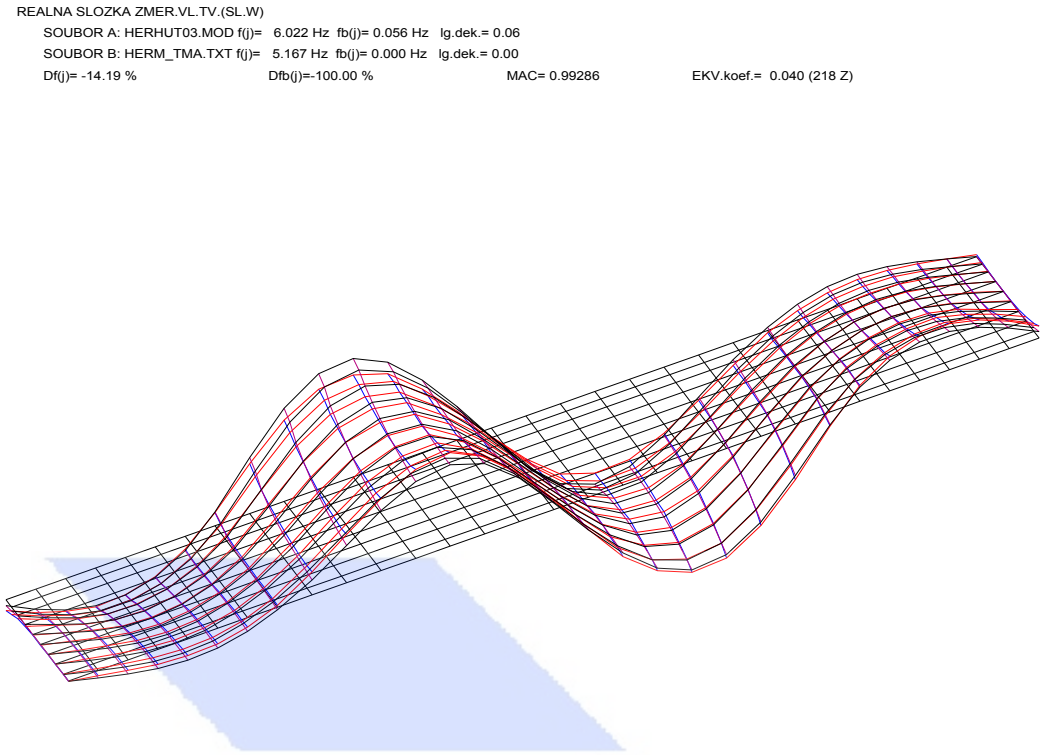
Tab. D.8 – Porovnání vypočtených a změřených modálních charakteristik

Experiment		**Model A**				**Model B**				**Model C**				Popis tvaru
Č. tv.	f (Hz)	Č. tv.	f (Hz)	Δ f	MAC	Č. tv.	f (Hz)	Δ f	MAC	Č. tv.	f (Hz)	Δ f	MAC	
1	6,02	1	5,167	14,2	0,993	1	5,699	5,3	0,997	1	5,814	3,4	0,996	1. tvar svislého ohybového kmitání
2	7,56	3	6,625	12,4	0,978	3	7,35	2,8	0,992	3	7,439	1,6	0,989	2. tvar svislého ohybového kmitání
3	9,69	4	8,024	17,2	0,915	4	8,83	8,9	0,927	4	8,904	8,1	0,923	3. tvar svislého ohyb. kmitání
4	10,90	6	9,907	9,1	0,520	5	10,31	5,4	0,881	5	10,32	5,4	0,879	1. tvar kroutivého kmitání
5	11,29	7	10,435	7,6	0,476	6	10,55	6,6	0,764	6	10,54	6,7	0,765	
6	13,32	8	13,063	1,9	0,690	9	14,08	-5,7	0,700	9	14,09	-5,8	0,706	4. tvar svislého ohybového kmitání
7	20,39	11	17,104	16,1	0,881	14	19,15	6,1	0,727	11	18,55	9,0	0,779	5. tvar svislého ohybového kmitání
8	21,82	17	20,349	6,7	0,813	17	21,20	2,9	0,903	15	21	3,8	0,831	2. tvar kroutivého kmitání
9	24,21	18	21,548	11,0	0,867	18	23,02	4,9	0,933	18	23,15	4,4	0,929	3. tvar kroutivého kmitání

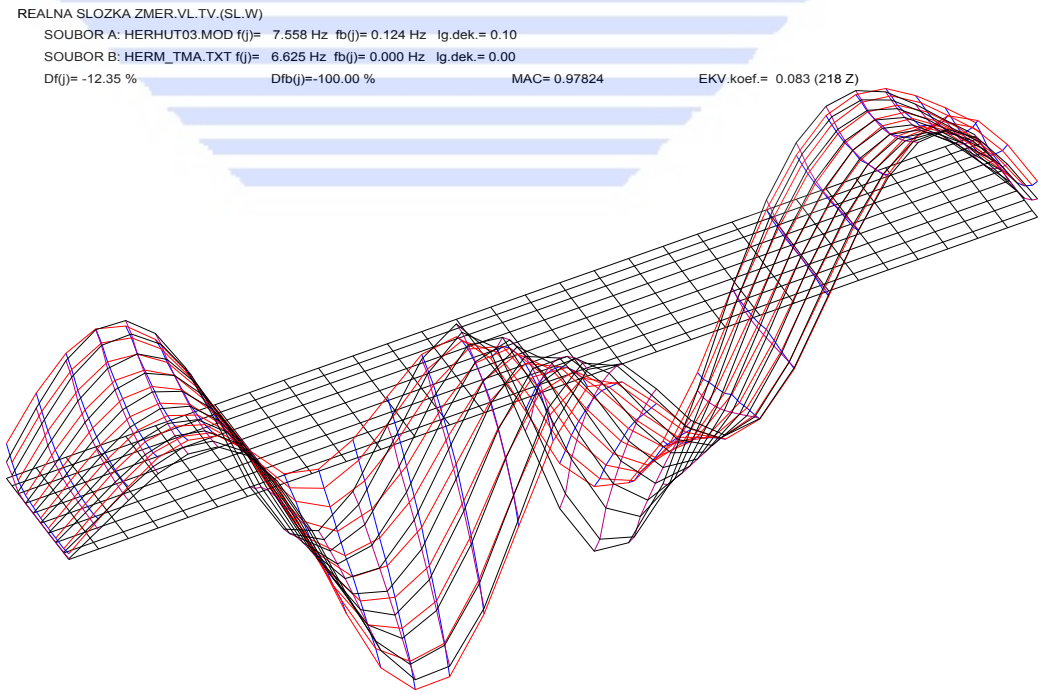
Průměrná Δf a MAC:								
pro všechny tvary	**10,7**	**0,793**	**4,1**	**0,869**	**4,1**	**0,8663**
pro tvary do 20 Hz	**10,4**	**0,762**	**3,9**	**0,877**	**3,2**	**0,876**

Příklady vizuálního porovnání změřených a vypočtených vlastních tvarů jsou nakresleny na obr. D.17 až obr. D.22, v obrázcích jsou vlastní frekvence označovány podle čísla experimentálně stanovené vlastní frekvence, červeně a modře jsou nakresleny experimentálně zjištěný vlastní tvary, černě a fialově vypočtené tvary vlastního kmitání.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

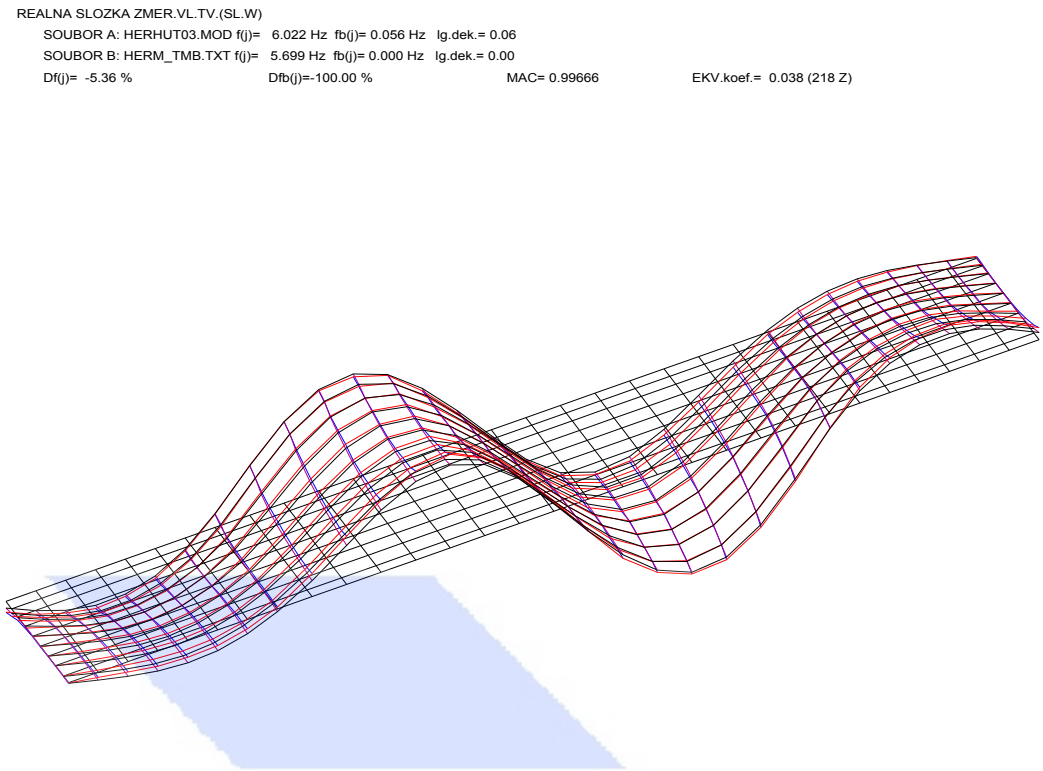


Obr. D.17 – Model A – porovnání vlastních tvarů příslušných k $f_{(1),teor}$ =5,169 Hz a $f_{(1),exp}$ =6,022 Hz

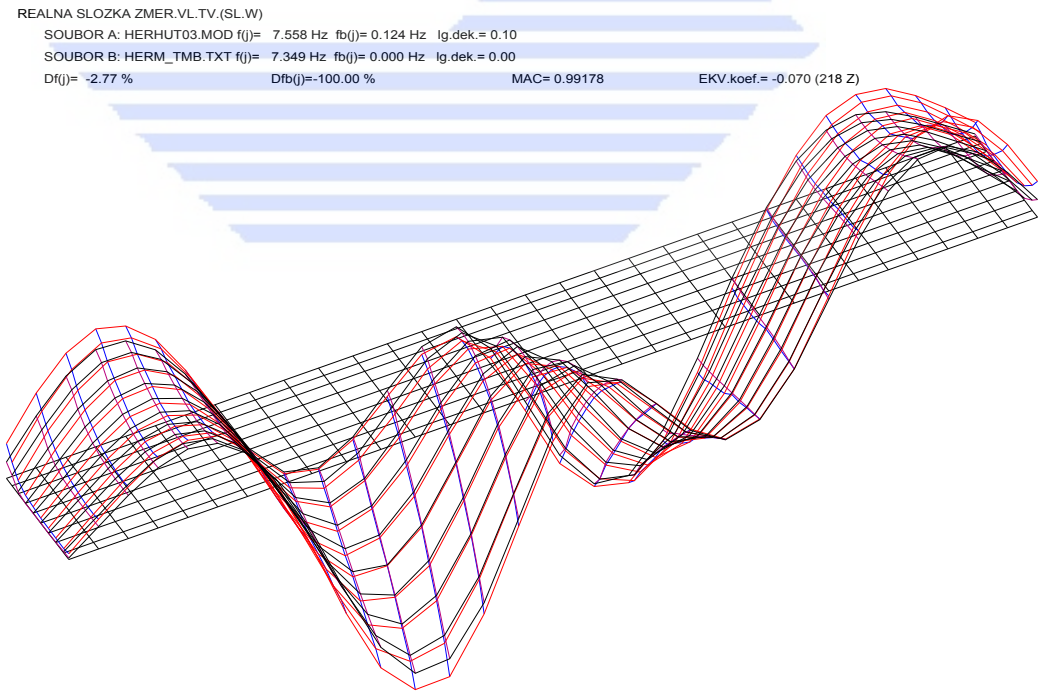


Obr. D.18 – Model A – porovnání vlastních tvarů příslušných k $f_{(3),teor}$ = 6,625 Hz a $f_{(2),exp}$ = 7,558 Hz

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

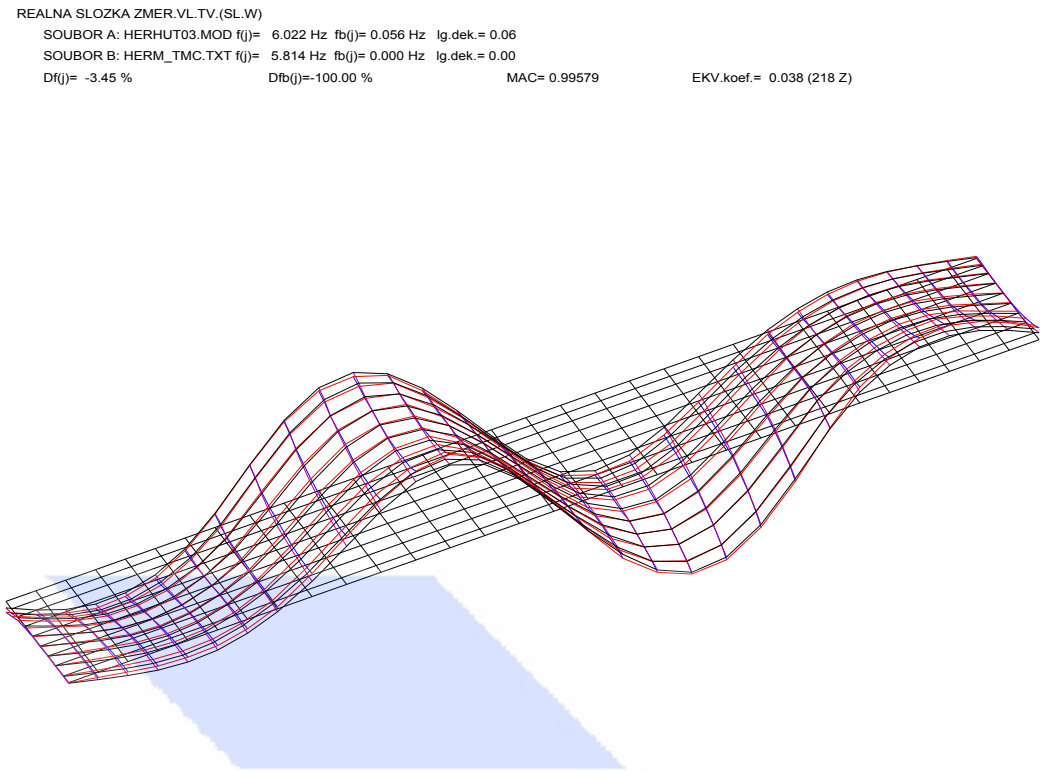


Obr. D.19 – Model B – porovnání vlastních tvarů příslušných k $f_{(1),teor}$ =5,699 Hz a $f_{(1),exp}$ =6,022 Hz

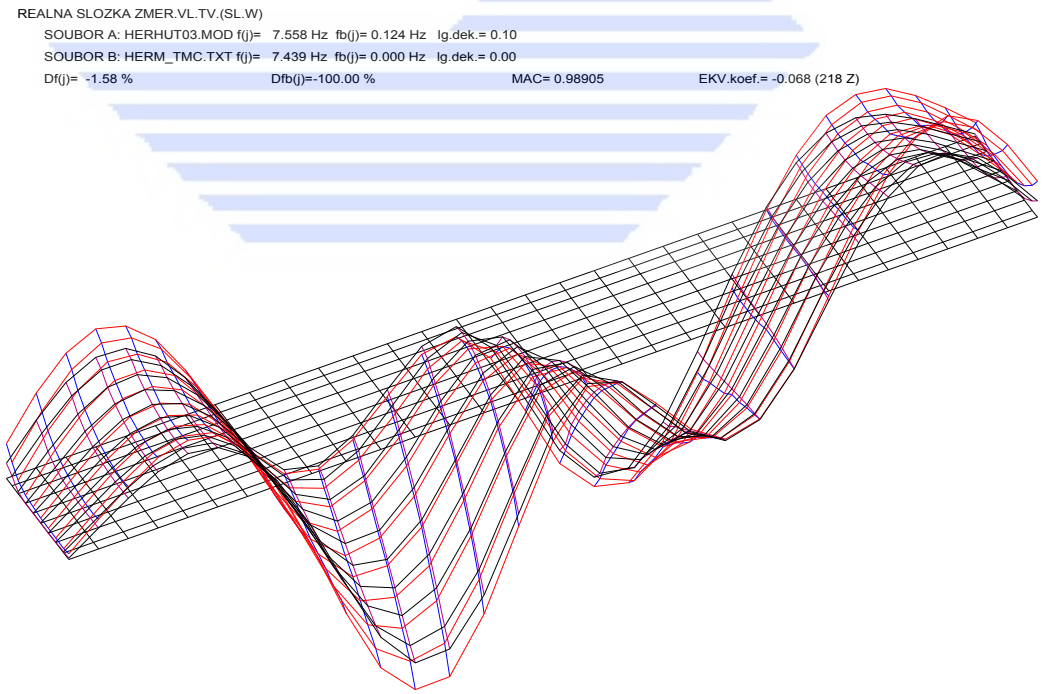


Obr. D.20 – Model B – porovnání vlastních tvarů příslušných k $f_{(3),teor}$ = 7,349 Hz a $f_{(2),exp}$ = 7,558 Hz

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. D.21 – Model C – porovnání vlastních tvarů příslušných k $f_{(1),teor}$ =5,814 Hz a $f_{(1),exp}$ =6,022 Hz



Obr. D.22 – Model C – porovnání vlastních tvarů příslušných k $f_{(3),teor}$ = 7,439 Hz a $f_{(2),exp}$ = 7,558 Hz

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

D.4 Shrnutí výsledků

Z porovnání vlastních tvarů a frekvencí výpočtového modelu a experimentu je patrné, že shoda experimentu a výpočtu byla velmi dobrá. Pro všechny experimentálně zjištěné tvary se podařilo nalézt teoretický protějšek. Pouze u tvarů 5, 6 a 7 byla shoda měřená koeficientem MAC okolo 0,75. Naopak se podařilo velmi dobře určit i vlastní tvary nad 20 Hz, což byla hranice budícího spektra. Největší odchylku vykazoval model A, jehož tuhost byla relativně malá. Ukazuje se tedy opět, že mostní příslušenství je v případě dynamického výpočtu nutno zohledňovat jeho tuhostí.

Oba modely B i C, které vznikly při verifikaci, odpovídaly realitě velice dobře. Model B vykazoval při porovnání koeficientem MAC nepatrně vyšší shodu než model C (průměrně pro všechny tvary 0,869 oproti 0,866), frekvenčně byl nepatrně horší model B (průměrná Δf byla 4,13% oproti 4,06% u modelu C). Je možno konstatovat, že modely B a C velmi dobře odpovídají realitě. Rozdíl, který je způsoben zohledněním předpínací síly je dán tím, že vlivem předpětí vznikají vratné síly v pilířích, které zpětně napínají konstrukci a nepatrně zvyšují vlastní frekvence. Tyto vratné síly se postupně snižují vlivem dotvarování betonu a relaxací předpínací výztuže. Zavedení předpětí tedy prakticky neovlivňuje výsledky modální analýzy a zjištěný vliv je zanedbatelný.

Porovnání tvarů potvrdilo, že vozovkové souvrství a mostní příslušenství má výrazný vliv na dynamickou odezvu.

Celkové závěry z teoretického výpočtu, verifikace výpočetního modelu a porovnání s experimentem je možno shrnout do následujících bodů:

- Vozovkové souvrství při buzení silou nízké intenzity spolupůsobí s hlavní nosnou konstrukcí a zvyšuje celkovou tuhost mostu, tedy i vlastní frekvence. Vhodným způsobem modelování vozovkového souvrství je rozdělení asfaltobetonu do excentricky umístěných prutových prvků. Jejich materiálové charakteristiky se určí podle typu asfaltu a teploty při měření.
- V případě monolitických betonových říms je nutno tyto uvažovat jako spolupůsobící s nosnou konstrukcí mostu. To lze opět provést pomocí excentrických prutových prvků vhodného průřezu.
- Modul pružnosti vozovkového souvrství závisí na jeho kvalitě a teplotě při měření a může se při různých teplotách měnit až pětinásobně. Je tedy nutné měřit při experimentu jeho teplotu. Při měření je nutno zabránit oslunění snímačů teploty.
- Zavedení vlivu předpětí do výpočtu vlastních tvarů se ukázalo jako nevýznamné a nedošlo ke zlepšení výstižnosti modelu. Předpětí nepatrně zlepšilo shodu frekvencí a nepatrně zhoršilo shodu vlastních tvarů.
- Při buzení silami nízké intenzity nedojde k překonání třecích sil v ložiskách. Ložiska se chovají jako neposuvná a jako taková se musí v teoretickém modelu pro porovnání s experimentem uvažovat.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Příloha E: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostu typu C

Jako reprezentant mostu typu C byl vybrán ocelobetonový spřažený most ve Vráži u Berouna. Zde se naskytla jedinečná příležitost porovnat chování mostu poškozeného a opraveného. Na jaře 2001 totiž došlo k nárazu těžkého vozidla do hlavní nosné konstrukce mostu, při které byl poškozen krajní nosník. Na podzim 2001 byla provedena oprava mostu, při které byla vyměněna deformovaná část pásnice a byla narovnána deformovaná část stěny. Na tomto mostě byla provedena modální analýza celkem dvakrát, poprvé na jaře roku 2001 na poškozeném mostě a na podzim téhož roku na mostě opraveném.

Na začátku bylo provedeno ověření hlavních rozměrů konstrukce, podle projektové dokumentace. Podle předběžného výpočtu vlastních frekvencí vycházela první vlastní frekvence okolo 3,3 Hz a většina vlastních tvarů do 20 Hz. Podle průběhu vlastních tvarů byla navržena poloha dynamického budiče tak, aby nebyl umístěn v uzlovém bodě.

E.1 Základní údaje o mostě:

Překonávaná komunikace	dálnice D5
Celková délka ocelové konstrukce	58,50 m
Součet rozpětí všech polí trámu mostovky	57,90 m
Rozpětí jednotlivých polí trámu mostovky	11,70+31,50+14,70 m
Celková šířka mostu	10,24m
Šířka mezi zábradlím	9,50 m
Šikmost křížení	$100,0^{g}$

E.2 Popis mostní konstrukce

Most překonává kolmým křížením dálnici D5 Praha - Plzeň v obci Vráž u Berouna. Niveleta mostu ve středu rozpětí je 333,118 m.n.m. Celková délka mostu je 58,50 m. Hlavní nosný systém tvoří spřažený ocelobetonový spojitý trám o třech polích o rozpětí 11,7+31,5+14,7m,

- **hlavní nosníky**

Vzájemná vzdálenost nosníků je 2200 mm, výška stěny všech 5 nosníků je po délce mostu konstantní 1 020 mm. Ocelová konstrukce je provedena jako celosvařovaná. Hlavní nosníky jsou navrženy s odstupňovaným průřezem. Šířka obou pásnic je 400 mm, tloušťka horní pásnice je 25 mm, nad vnitřními podporami 36 mm. Tloušťka dolní pásnice je u krajů 30 mm, nad vnitřní podporou 42 mm, ve středním poli 34 mm. Tloušťka stojiny je 10 mm, nad podporami 12 mm. Příčné výztuhy jsou rozmístěny po cca 2000 mm, v místě příčných ztužidel jsou oboustranné, jinde jednostranné.

Spřažení je zajištěno vetknutím horní pásnice pomocí dvou až tří řad spřahovacích trnů. Nad podporami jsou všechny nosníky ztuženy příčníkem. V polích jsou umístěny mezilehlé příčníky, které spojují dva krajní nosníky.

- **mostovka**

Monolitická železobetonová deska mostovky je konstantní tloušťky 230 mm mezi hlavními nosníky, vně krajních nosníků má proměnnou tloušťku 230 - 150 mm.

- **materiál**

Ocel S355 a S235

- **materiál desky mostovky**

Výztuž V 10425

Beton B330 dle projektu, při zkoušce byl zjištěn pomocí Schmidtova tvrdoměru beton tř. B490

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

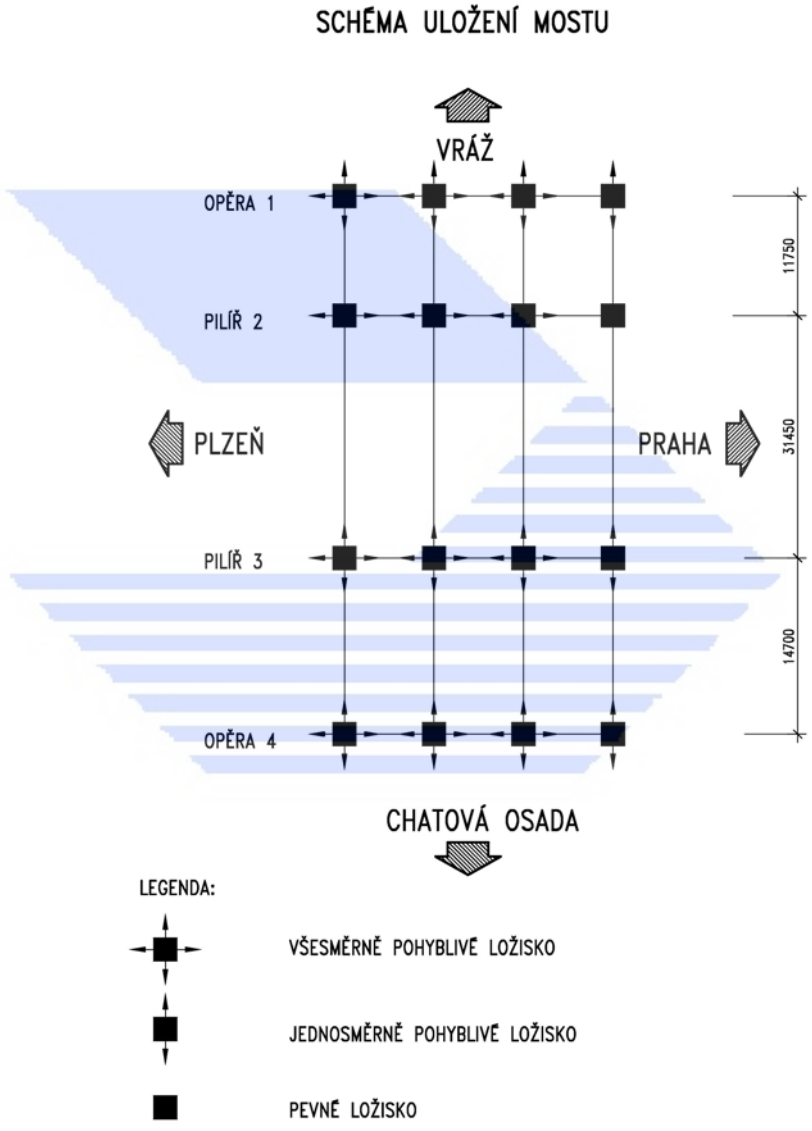
- **vybavení mostu**

prefabrikovaná římsa SSŽ
chodníky monolitické železobetonové

- **vozovka** - šířka mezi obrubníky 7,00 m

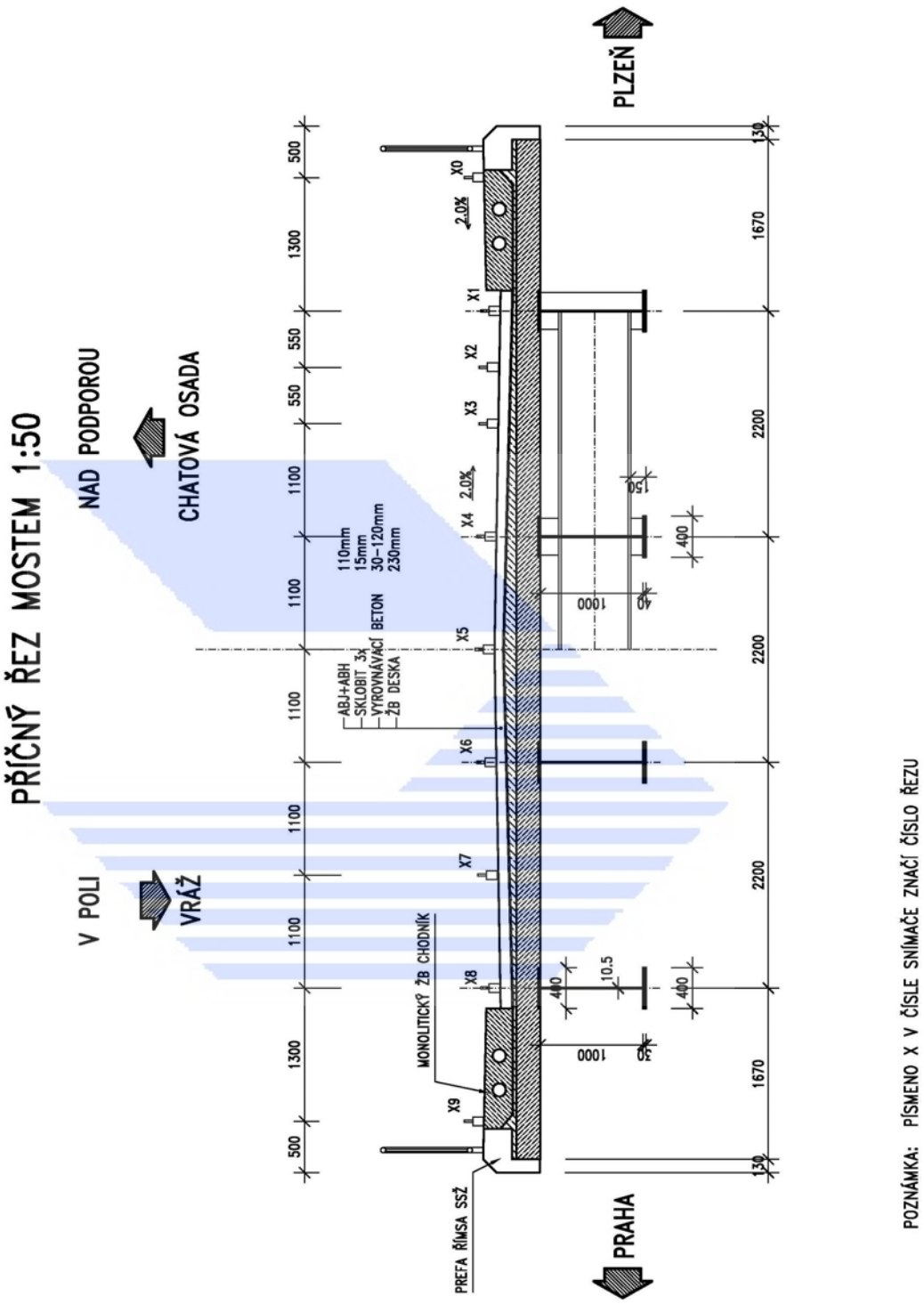
obrusná vrstva (ABJ+ABH)	40 mm
ložná vrstva (ABJ)	40 mm
izolační vrstva (Sklobit 3x)	15 mm
lepící nátěr	
vyrovnávací beton	30-120 mm
celková tloušťka	155-245 mm

- **ložiska** - kruhová hrncová.



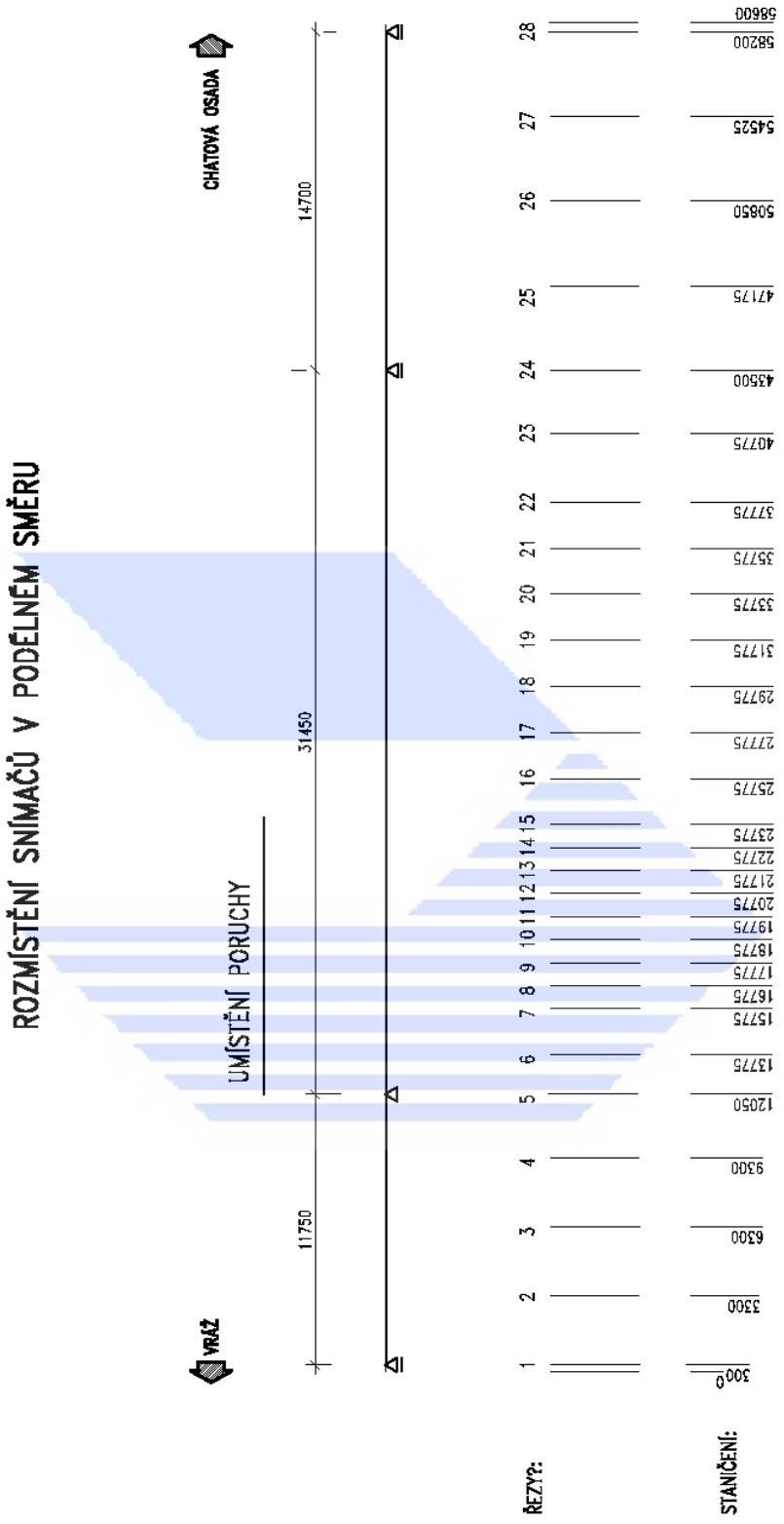
Obr. E.1 Schéma uložení mostu

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



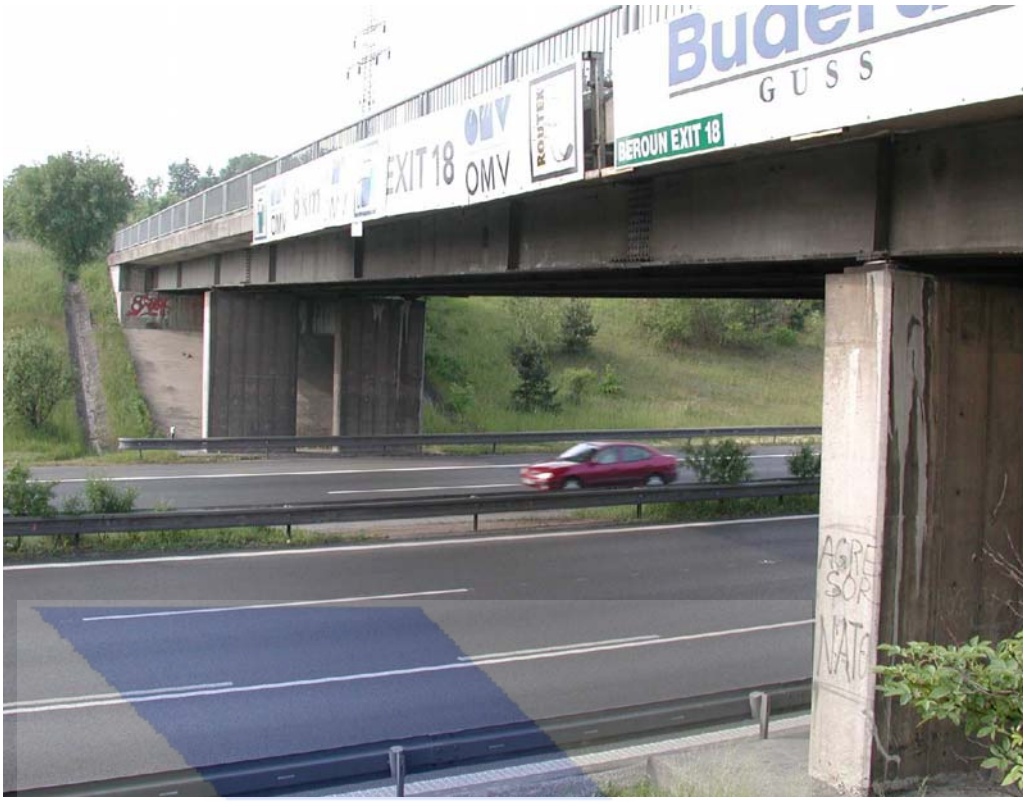
Obr. E.2 Příčný řez

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. E.3 Podélný řez a rozmístění příčných řezů

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. E.4 Pohled na most

Obr. E.5 Podhled mostu

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Obr. E.6 Omezení dopravy po poruše

Obr. E.7 Pohled na poškozený nosník

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

E.3 Experimenty

E.3.1 Poškozený most

Na jaře roku 2001 byl most poškozen nárazem tahače s autojeřábem do mostu. Došlo k poškození jednoho krajního nosníku, který byl nárazem vyhnut o cca 400 mm (obr. E.7). Dále došlo k odtržení svislých výztuh stojiny a k porušení šroubů připojujících mezilehlé příčné ztužidlo. Na základě této poruchy byl provoz na mostě omezen jen na nepoškozenou polovinu mostu, viz. obr. E.6. Na takto poškozeném mostě byla provedena experimentální modální analýza. Na základě projektové dokumentace byl vytvořen prostorový výpočetní model, kterým měl za cíl teoreticky určit vlastní tvary a frekvence nepoškozeného mostu.

E.3.2 Opravený most

Na podzim 2001 byla provedena oprava poškozeného nosníku, deformovaná pásnice byla odpálena, stojina za tepla srovnána a přivařena nová pásnice. Následně po opravě byla provedena druhá experimentální modální analýza.

E.4 Teoretický výpočet

E.4.1 Popis modelu

Model byl vytvořen v programu NEXIS 32, verze 3.20.25, prostorový model s použitím skořepinových, deskostěnových a prutových prvků. Hlavní nosníky byly modelovány včetně výztuh stojiny jako deskostěnové, jen horní pásnice byla modelována prutovými prvky. Stojina příčníků byla deskostěnová, obě pásnice prutové. Železobetonová deska byla modelována s použitím deskostěnových prvků, jejichž osa byla zadána ve střednici desky a do modulu pružnosti betonu byla započtena plocha výztuže. Celkový modul pružnosti desky byl 40000 MPa. Tuhé spojení desky s hlavním nosníkem bylo realizováno svislými pruty, které spojovaly horní pásnici s deskou. Jejich tuhost byla volena tak, aby odpovídala ploše betonu nad pásnicí. Poškození nosníku bylo modelováno skořepinovými prvky podle skutečné poruchy.Všechny geometrické charakteristiky byly zadány podle projektové dokumentace a podle provedeného ověření konstrukce.

E.4.2 Verifikace modelu

Vytvořený model byl postupně verifikován, aby byla dosažena co nejlepší možná shoda s experimentem. Při porovnání s experimentem bylo zjištěno, že na dynamických vlastnostech mostu se podílí nejen železobetonová deska, ale do celkové tuhosti je nutno zahrnout i vrstvu vyrovnávacího betonu na mostovce, vozovkového souvrství a monolitických spojitých chodníků. Tyto části byly započteny do tloušťky betonové desky přes modul pružnosti jednotlivých materiálů. Chodníky byly započteny pomocí prutů, umístěných excentricky na konzolách desky. Vzhledem k prokluzu a neúplnému spolupůsobení byly chodníky uvažovány sníženým modulem pružnosti.

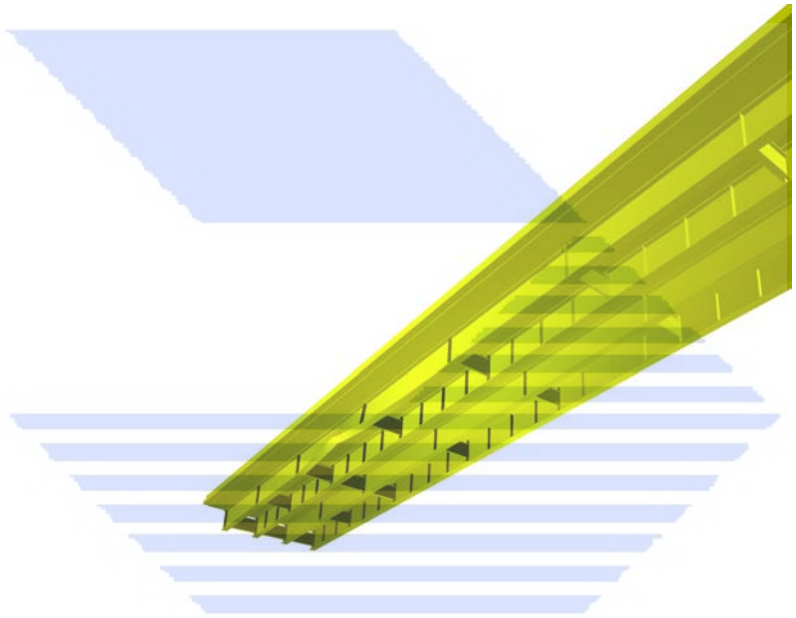
E.4.3 Výsledné vlastní tvary a frekvence

V tab. E.1 jsou uvedeny vlastní frekvence prvních dvaceti vlastních tvarů poškozeného mostu a na obr. E.8 je uveden render modelu poškozeného mostu.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Tab. E.1 Vlastní frekvence poškozeného mostu

číslo tvaru	Fj [Hz]	číslo tvaru	Fj [Hz]
1	3,24	11	13,33
2	3,60	12	13,50
3	7,88	13	14,09
4	8,21	14	14,17
5	8,21	15	14,50
6	9,67	16	15,27
7	9,97	17	15,80
8	10,87	18	18,87
9	11,12	19	19,05
10	12,02	20	19,33



Obr. E.8 Render modelu poškozeného mostu

E.4.4 Popis modelu opraveného mostu

Použitý model je shodný jako u poškozeného mostu, pouze poškozený nosník byl nahrazen opraveným.

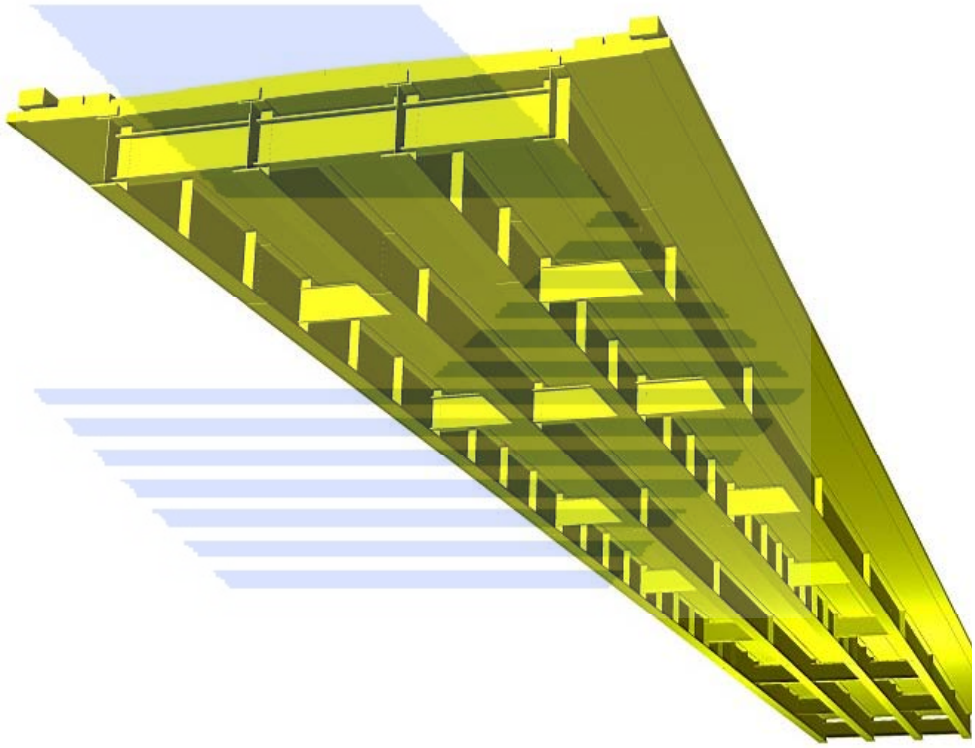
E.4.5 Výsledné vlastní tvary a frekvence

V tab. E.2 jsou uvedeny vlastní frekvence prvních dvaceti vlastních tvarů opraveného mostu a na obr. E.9 je uveden render modelu opraveného mostu.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Tab. E.2 Vlastní frekvence opraveného mostu

číslo tvaru	Fj [Hz]	číslo tvaru	Fj [Hz]
1	3,27	11	13,98
2	3,66	12	14,37
3	8,08	13	14,73
4	8,29	14	15,30
5	9,74	15	15,85
6	10,05	16	18,99
7	10,90	17	19,06
8	11,26	18	19,49
9	12,25	19	19,69
10	13,39	20	20,15



Obr. E.9 Render modelu opraveného mostu

E.5 Vyhodnocení

E.5.1 Porovnání výpočtu s experimentem

Vlastní tvary a frekvence zjištěné teoretickým výpočtem byly porovnány s experimentálně zjištěnými hodnotami za účelem ověření přiléhavosti výpočetního modelu. Porovnány byly jak hodnoty sobě si odpovídajících vlastních frekvencí, tak odpovídající si vlastní tvary pomocí koeficientu MAC. Porovnání je shrnuto do tab. E.3 a E.4.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Tab. E.3 Porovnání vlastních frekvencí poškozeného mostu

Experiment		Δf	Výpočet		Popis tvaru	MAC
č. tvaru	f(Hz)		č.tvaru	f(Hz)		Exp/Výp
1	3,26	-0,6	1	3,24	1. ohybový	0,9426
2	3,41	5,2	2	3,60	1. kroutivý	0,6038
3	8,16	-3,6	3	7,88	2. ohybový pošk. nosník	0,9121
4	8,42	15,5	7	9,97	2. ohybový v protifázi	0,6323
5	10,21	-5,6	6	9,67		0,8252
6	12,01	0,1	10	12,02		0,1184
7	13,74	-3,1	11	13,33		0,3507
8	14,72	-3,9	14	14,17		0,8483
9	15,58		-----	-----	nenalezen	

Tab. E.4 Porovnání vlastních frekvencí opraveného mostu

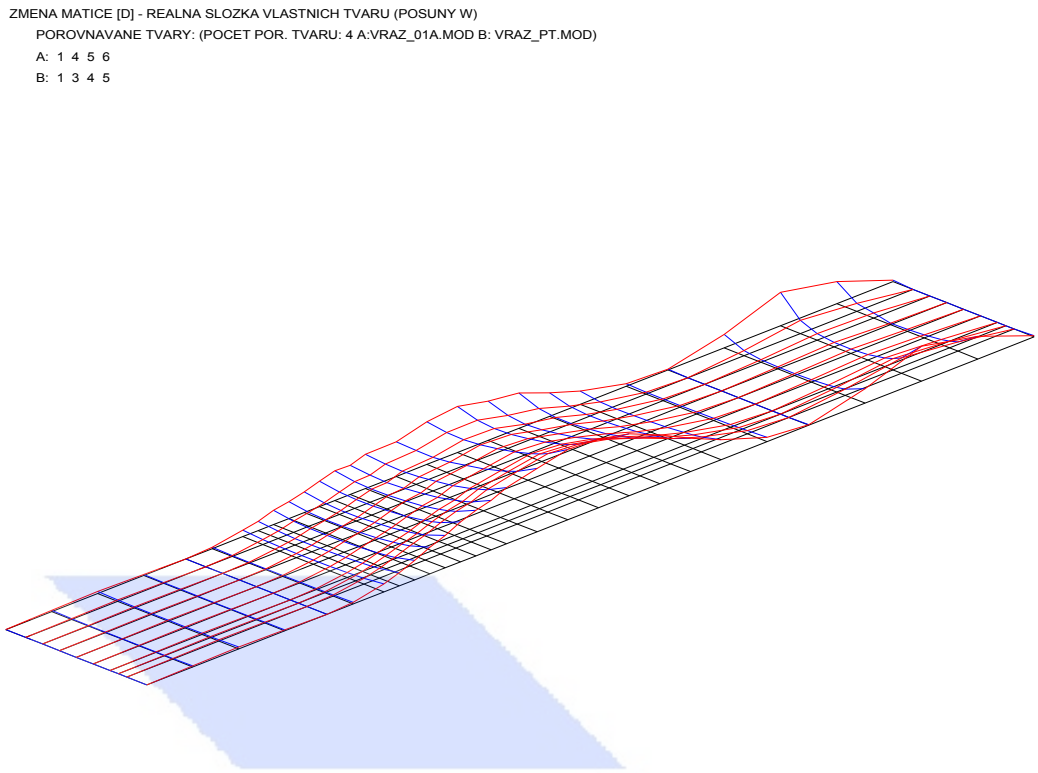
Experiment		Δf	Výpočet		Popis tvaru	MAC
č. tvaru	f(Hz)	%	č.tvaru	f(Hz)		Exp/Výp
1	3,38	-3,3	1	3,27	1. ohybový	0,9822
2	3,65	0,3	2	3,66	1. kroutivý	0,9611
3	8,54	-5,7	3	8,08	2. ohybový	0,9647
4	8,95	-8,0	4	8,29	2. kroutivý	0,8912
5	10,86	-11,5	5	9,74		0,8731
6	11,39	-13,3	6	10,05		0,6427
7	14,18	-5,9	10	13,39		0,9017
8	15,17		-----	-----	nenalezen	
9	15,89	-7,9	13	14,73		0,8626
10	16,58	-8,4	14	15,30		0,3416
11	19,06		-----	-----	nenalezen	
12	19,37	-1,6	17	19,06		0,1777

Z tabulek je patrné, že u opraveného mostu byla shoda experimentu a výpočtu poměrně dobrá až do sedmé vlastní frekvence, větší rozdíly byly u kroutivých tvarů. U poškozeného mostu došlo ke dobré shodě do páté vlastní frekvence, opět byly rozdíly větší u kroutivých tvarů. Rozdíly u poškozeného mostu byly výraznější a projevily se i na koeficientu MAC.

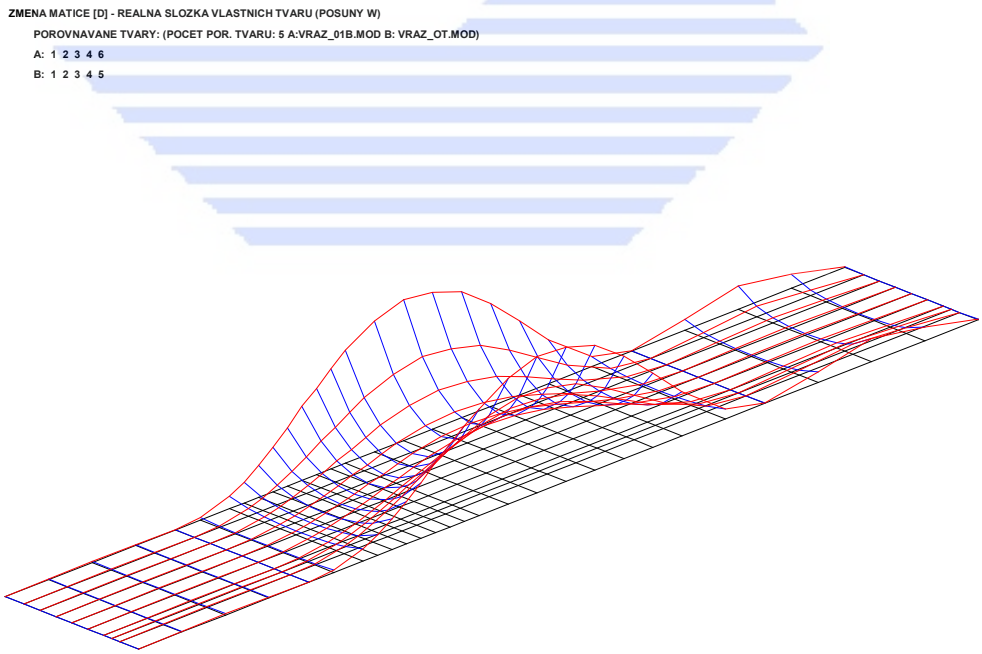
Jako další způsob porovnání byla užita metoda výpočtu matice poddajnosti z vlastních tvarů a frekvencí (viz obr. E.10 a E.11). U obou modelů (poškozený i nepoškozený) je patrné, že poddajnost v podélném směru je srovnatelná, největší rozdíl modelu proti experimentu je v příčné ohybové tuhosti mostu, resp. desky mostovky, především ve středním poli. Tento rozdíl může být způsoben mnoha faktory:

- větší množství příčné výztuže v desce než bylo uvažováno
- vyšší hodnota modulu pružnosti betony v důsledku vyzrávání betonu
- větší tloušťka desky mostovky ve středním poli následkem průhybu při betonáži
- vyšší spolupůsobení vyrovnávacího betonu a vozovkového souvrství s deskou mostovky
- vlastnost použitých konečných prvků

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. E.10 Poškozený most - rozdíly v poddajnosti - experiment x výpočet



Obr. E.11 Opravený most - rozdíly v poddajnosti - experiment x výpočet (převýšeno)

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

E.5.2 Porovnání poškozeného a opraveného mostu

Pro určení změny chování konstrukce po provedení opravy byly porovnány hodnoty dynamických charakteristik poškozeného a opraveného mostu. Porovnání bylo provedeno pro hodnoty zjištěné výpočtem i pro hodnoty zjištěné experimentálně.

V tab. E.5 jsou porovnány hodnoty vlastních frekvencí sobě si odpovídajících vlastních tvarů z teoretického výpočtu poškozeného a opraveného mostu.

Tab. E.5 Porovnání vlastních frekvencí poškozeného a opraveného mostu

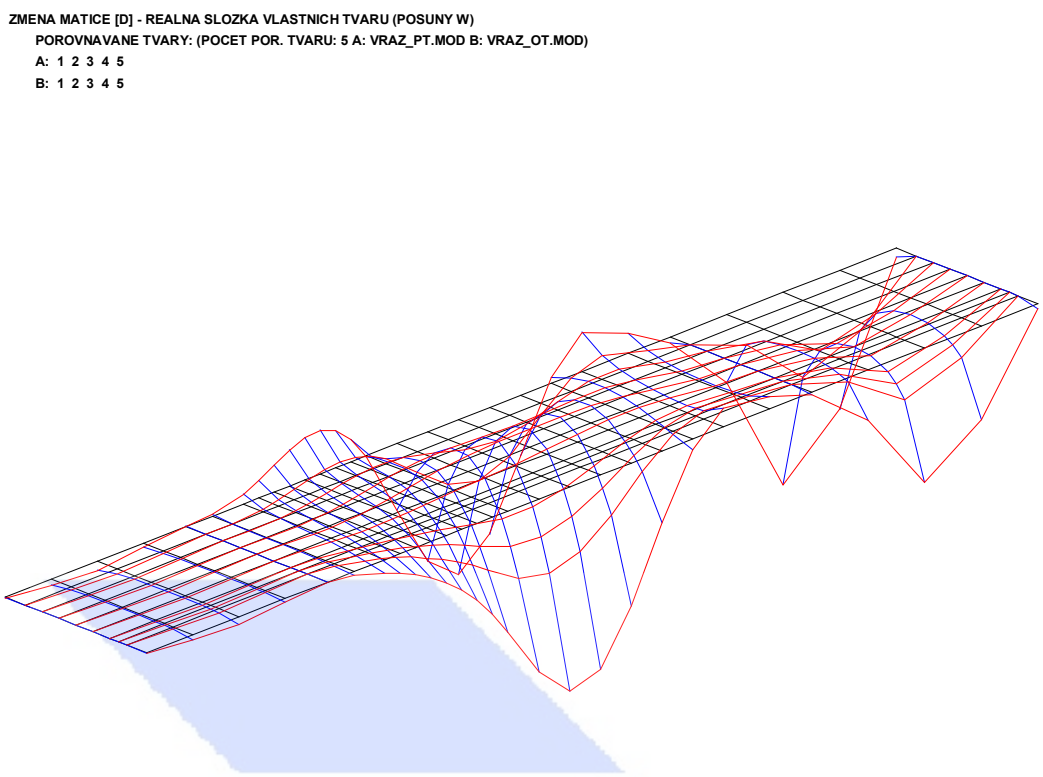
Poškozený most		Δf	Opravený most		Popis tvaru
č. tvaru	f(Hz)	%	č.tvaru	f(Hz)	
1	3,24	0,9	1	3,27	1. ohybový
2	3,60	1,7	2	3,66	1. kroutivý
3	7,88	2,5	3	8,08	2. ohybový
4	8,21	1,0	4	8,29	2. kroutivý
6	9,67	15,8	5	9,74	2. kroutivý v protifázi
7	9,97	3,8	6	10,05	2. ohybový v protifázi
8	10,87	8,6	7	10,90	příčný ohyb střed. pole
9	11,12	3,4	8	11,26	
10	12,02	9,2	9	12,25	
11	13,33	10,2	10	13,39	

Z porovnání je patrné, že po provedení opravy došlo ke zvýšení vlastních frekvencí, což odpovídá tuhosti celkovému zvýšení tuhosti konstrukce.

Z vlastních tvarů je možno dalším výpočtem určit matici poddajnosti konstrukce. V uvedeném příkladu byla dále porovnána poddajnost mostu před opravou a po opravě a stanoven jejich rozdíl (viz obr. E.12). Výpočet a porovnání bylo provedeno pro prvních pět vlastních tvarů.

Z obr. E.12 je zřejmé, že došlo ke změně torzní tuhosti mostu, která se projevila především ve středním poli a v menší míře i v krajním poli. Nižší tuhost poškozeného nosníku má vliv na celkovou torzní tuhost mostu a projevuje se na obou krajích mostu.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. E.12 Změna poddajnosti mostu po opravě

E.6 Závěr

Z provedené modální analýzy mostu typu C, tj. ocelobetonové spřažené mostní konstrukce o více polích do max. rozpětí 50,0 m, byly získány praktické zkušenosti z modelování mostu, jehož hlavní nosná konstrukce je v tomto případě složená z ocelových nosníků spřažených s betonovou deskou mostovky. Pro tento typ mostu byl verifikován výpočetní model se zahrnutím vlivu vozovkového a izolačního souvrství. Teoretický model mostu může sloužit jako vzor pro tvorbu teoretického modelu mostu stejného typu.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Příloha F: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostu typu D

Mostem typu D je trámová mostní konstrukce o více polích s rozpětím pole do 135 m zhotovená z monolitického předpjatého betonu nebo konstrukce ocelová. Příkladem pro použití experimentální modální analýzy je ocelový trámový most v Choceradech na silnici č. 113 přes řeku Sázavu, Ev. č. 113-008. Modální analýza byla provedena v září roku 2002.

F.1 Základní údaje o mostě:

Překonávaná překážka	řeka Sázava
Celková délka ocelové konstrukce	83,82 m
Součet rozpětí všech polí trámu mostovky	81,00 m
Rozpětí jednotlivých polí trámu mostovky	27,00+27,00+27,00 m
Celková šířka mostu	10,256 m
Šířka mezi zábradlím	10,056 m
Šikmost křížení	$100,0^{g}$

F.2 Popis mostní konstrukce

Most překonává kolmým křížením řeku Sázavu v obci Chocerady v okrese Benešov. Niveleta mostu ve středu rozpětí je 283,407 m.n.m. Jedná se o trámový most s horní mostovkou o třech prostých polích s rozpětími 3x27,0 m. Hlavní nosný systém tvoří ocelový svařovaný trám se dvěma komorovými nosníky s ortotropní mostovkou.

- **hlavní nosníky**

Komorové nosníky mají konstantní průřez po celé délce mostu (obr.3). Osová vzdálenost komorových nosníků je 3886 mm Dolní pásnice je 2350 mm široká a má tloušťku 14 mm. Stojina má tloušťku 10 mm; výška krajní stojiny je 1424 mm, výška vnitřní stojiny je 1470 mm. Příčná diafragmata tvořená výztuhami tvaru T jsou rozmístěna po 2250 mm. Ve čtvrtinách rozpětí je navíc umístěno příhradové ztužení tvořené dvěma profily L70x6. V prostoru mezi hlavními nosníky je revizní lávka, uložená na nosnících I 100, ve čtvrtinách rozpětí na svařovaných I nosnících výšky 188 mm, které jsou zároveň součástí příčného ztužení. Nad ložisky je plnostěnné diafragma z plechu tl. 10 mm. V místě revizní lávky je proveden průlezový otvor ø 600 mm. Ocelová konstrukce je provedena jako celosvařovaná.

- **mostovka**

Ortotropní ocelová mostovka je tvořena plechem tl. 14 mm, vyztuženým trapézovými výztuhami výšky 250 mm a tl. 10 mm. Po 2250 mm jsou umístěny příčné výztuhy tvaru T o výšce 454 mm, tl. stojiny 8 mm, pásnice 120x14 mm. Na chodníkových konzolách je plech mostovky tloušťky 10 mm.

- **materiál O.K.**

Většina ocelové konstrukce je z oceli S235, pouze některé výztuhy tvaru L jsou z oceli S355.

- **vybavení mostu**

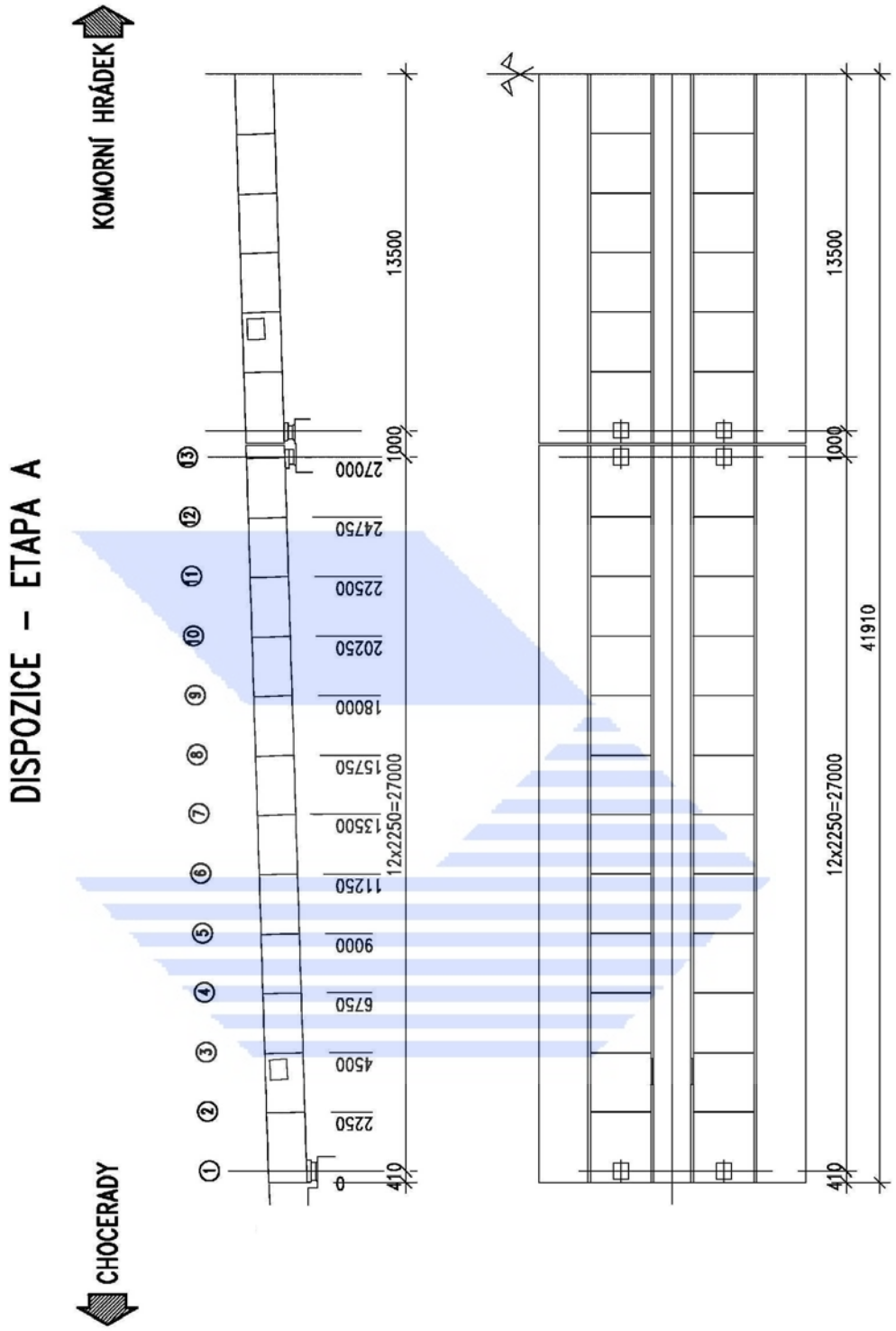
odvodnění – svislé svody u obou obrubníků
osvětlení – dva osvětlovací stožáry na návodní straně

- **vozovka** - šířka mezi obrubníky 7,50 m

druh vozovky – živičná, litý asfalt tl. 70 mm

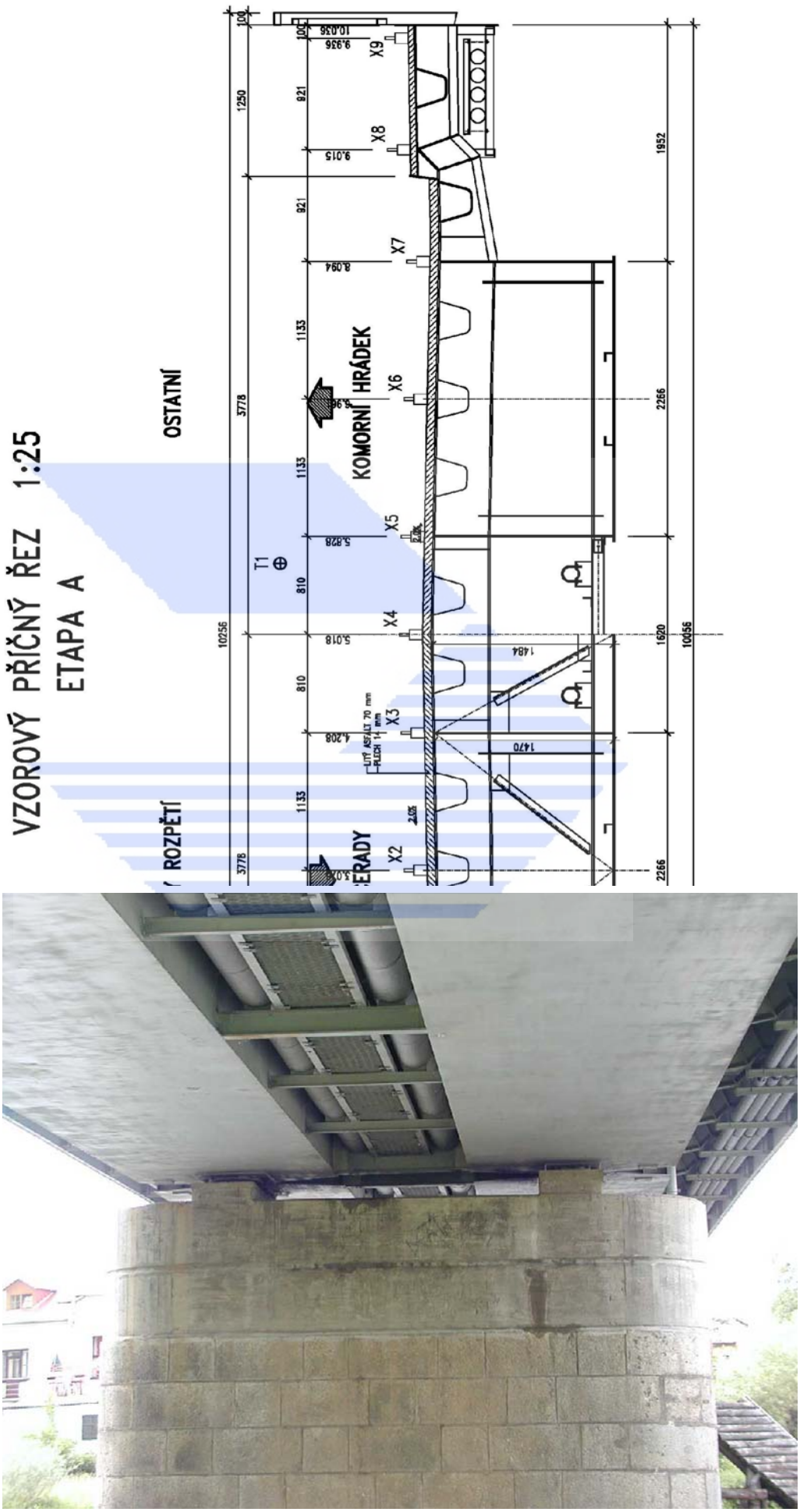
- **ložiska** - kruhová hrncová, pro každé pole 2 pevná a 2 podélně posuvná.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. F.1 Podélný řez a rozmístění příčných řezů

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. F.4 Podhled mostu

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

F.3 Experiment

V září roku 2002 byla provedena experimentální modální analýza, při které byly změřeny dynamické charakteristiky jednoho pole. Bylo zvoleno pole na pravobřežní straně mostu.

Před experimentálním měřením byly ověřeny hlavní rozměry konstrukce z projektové dokumentace. Potom byl proveden zjednodušený teoretický výpočet vlastních tvarů a jejich frekvencí. První vlastní frekvence byla vypočtena o hodnotě 4,7 Hz. Dále podle průběhu vlastních tvarů byla navržena poloha dynamického budiče při experimentálním vyšetřování. V tab. F.1 jsou uvedeny změřené vlastní frekvence s popisem tvaru.

Tab. F.1 Změřené vlastní frekvence kmitání mostu

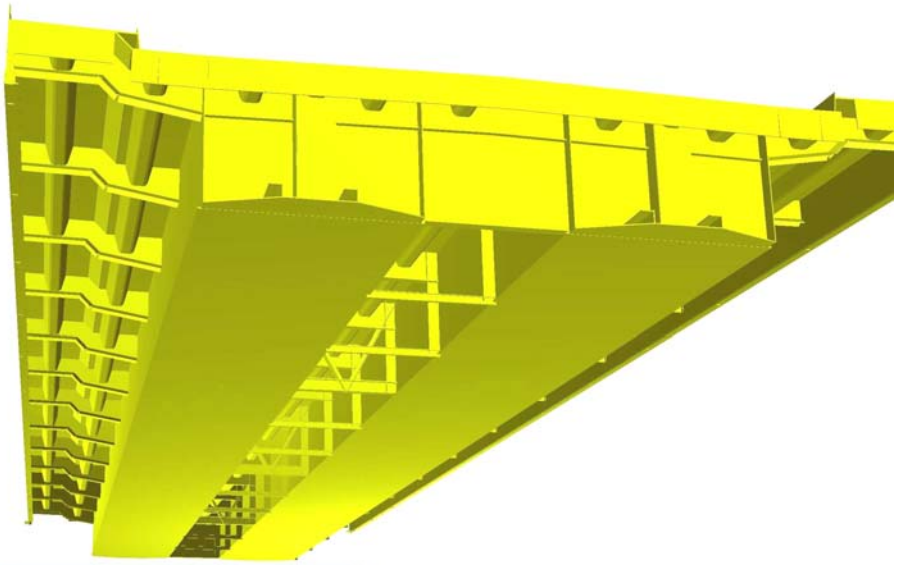
Poř. č. (j)	Vlastní frekvence	Frekvence útlumu	Logarit. dekrement útlumu	Poměrný útlum	Popis charakteru vlastního tvaru
	$f_{(j)}$ [Hz]	$f_{b(j)}$ [Hz]	$\vartheta_{b(j)}$	$b_{r(j)}$	
(1)	4.71	0.120	0.160	0.025	1. tvar svislého ohybového kmitání
(2)	8.84	0.201	0.143	0.023	1. tvar kroutivého kmitání
(3)	14.64	0.467	0.201	0.032	2. tvar svislého ohybového kmitání
(4)	16.15	0.690	0.269	0.043	2. tvar kroutivého kmitání
(5)	18.55	0.408	0.138	0.022	1. tvar příčného ohybového kmitání
(6)	21.30	0.307	0.090	0.014	2. tvar příčného ohybového kmitání
(7)	22.42	0.149	0.042	0.007	
(8)	31.09	0.323	0.065	0.010	3. tvar příčného ohybového kmitání
(9)	35.55	0.452	0.080	0.013	4. tvar příčného ohybového kmitání
(10)	42.56	0.280	0.041	0.007	
(11)	46.13	0.146	0.020	0.003	

F.4 Teoretický výpočet

F.4.1 Popis modelu

Podrobný výpočetní model byl vytvořen v programu NEXIS 32, verze 3.20.25. Byl to prostorový model s použitím skořepinových, deskostěnových a prutových prvků. Stěny a pásy hlavních nosníků a deska mostovky byly modelovány jako deskostěnové, výztuhy stěn a dolního pásu a trapézové podélné výztuhy plechu mostovky byly modelovány prutovými prvky. Stojina příčných výztuh byla deskostěnová s prutovou pásnicí. Všechny geometrické charakteristiky byly zadány podle projektové dokumentace a podle provedeného ověření konstrukce.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. F.5 Render modelu

F.4.2 Verifikace modelu

Vytvořený výpočetní model byl postupně verifikován tak, aby byla dosažena co nejlepší možná shoda s experimentem. Jak již bylo zjištěno při modální analýze mostu typu C ve Vráži u Berouna (viz Příloha E), tak na dynamické odezvě konstrukce se podílí také vozovkové a izolační souvrství. Pro ověření tohoto vlivu byly vytvořeny celkem tři modely. Tyto modely se liší způsobem a rozsahem zohlednění vozovkového souvrství.

Model A

V tomto modelu byly asfaltové vrstvy zohledněny pouze jako spojitá hmota, která zatěžuje plech mostovky. Jejich příspěvek k tuhosti konstrukce zohledněn nebyl.

Model B

V tomto modelu byly asfaltové vrstvy zohledněny jednak jako spojitá hmota, která zatěžuje plech mostovky, jednak byl zohledněn jejich příspěvek k tuhosti konstrukce. To bylo provedeno pomocí ekvivalentního modulu pružnosti plechu mostovky. Modul pružnosti litého asfaltu při teplotě cca 15°C je E_{LA} = 5500 MPa. Tloušťka asfaltových vrstev je 70 mm. Plech mostovky má modul pružnosti E_a = 210000 MPa, tloušťku 14 mm. Ekvivalentní modul pružnosti lze pak spočítat takto:
E_e=210000*(5500/210000*70+14)/14=237500 MPa
Tento ekvivalentní modul pružnosti byl zadán pro plech mostovky.

Model C

V tomto modelu byly asfaltové vrstvy zohledněny jednak jako spojitá hmota, která zatěžuje plech mostovky, jednak byl zohledněn jejich příspěvek k tuhosti konstrukce, stejně jako v modelu B. To bylo provedeno opět pomocí ekvivalentního modulu pružnosti plechu mostovky. Pro lepší vyjádření vlivu vozovkového souvrství na tuhost plechu mostovky ve směru kolmo na osu mostu bylo toto souvrství modelováno pomocí prutů průřezu

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

2250x70 mm, umístěných příčně v plechu mostovky v místě příčných výztuh. Těmto prutům byla udělena excentricita 35+7=42 mm, takže jsou umístěny ve střednicové rovině v místě vozovkových vrstev. Modul pružnosti těchto prutů je E_{LA} = 5500 MPa.

F.4.3 Výsledné vlastní tvary a frekvence

V tab. F.2 je uvedeno prvních 15 vypočtených vlastních frekvencí pro všechny tři uvažované teoretické výpočetní modely.

Tab. F.2 Vlastní frekvence modelů A, B, C

Model A		Model B		Model C	
Číslo tvaru	Fj [Hz]	Číslo tvaru	Fj [Hz]	Číslo tvaru	Fj [Hz]
1	4.81	1	4.865	1	4.87
2	8.41	2	8.500	2	8.54
3	14.69	3	14.84	3	14.93
4	15.42	4	15.56	4	15.69
5	15.59	5	15.91	5	15.97
6	16.94	6	17.05	6	17.29
7	20.03	7	20.15	7	20.24
8	21.60	8	21.81	8	21.99
9	21.72	9	21.93	9	22.11
10	23.22	10	23.41	10	23.48
11	25.49	11	25.71	11	25.86
12	25.78	12	25.93	12	26.27
13	26.94	13	27.04	13	27.14
14	27.08	14	27.22	14	27.32
15	28.24	15	28.31	15	28.37

Z porovnání hodnot vlastních frekvencí je zřejmé, že model B je tužší než model A a model C je ještě tužší než model B. Porovnání dynamického chování jednotlivých modelů s chováním skutečné konstrukce při experimentálním ověřování je popsáno dále.

F.4.4 Porovnání výpočtu s experimentem

Vlastní tvary a frekvence, zjištěné teoretickým výpočtem byly porovnány a experimentálně zjištěnými hodnotami za účelem ověření přiléhavosti výpočetního modelu. Porovnány byly jak hodnoty sobě si odpovídajících vlastních frekvencí, tak odpovídající si vlastní tvary pomocí koeficientu MAC. Porovnání je shrnuto do tab. F.3.

Z porovnání vlastních tvarů a frekvencí teoretického modelu a experimentu je patrné, že shoda experimentu a výpočtu byla dobrá u prvních pěti vlastních frekvence. U dalších tvarů byla shoda nižší a některé tvary nebyly nalezeny, jednalo se o tvary, které byly nad hranicí 20 Hz, což byla horní hranice budícího spektra. Všechny modely A, B i C odpovídaly realitě velice dobře, největší míru shody vykazoval model C, jak ve frekvencích, tak u koeficientu MAC. Největší rozdíly mezi modely byly ve vlastním tvaru č. 12, kde byl právě model C výrazně výstižnější. Porovnání tvarů potvrdilo, že vozovkové souvrství má nezanedbatelný vliv na dynamickou odezvu, i když tento vliv je menší než u ocelobetonového mostu ve Vráži u Berouna.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Tab. F.3 Porovnání vlastních frekvencí a tvarů

Experiment		Výp.	Model A			Model B			Model C			Popis tvaru
Č. tv.	f (Hz)	Č. tv.	f (Hz)	Δ f	MAC	f (Hz)	Δ f	MAC	f (Hz)	Δ f	MAC	
1	4,71	1	4,81	-2,1	0,997	4,87	-3,3	0,997	4,87	-3,4	0,997	1. ohybovy
2	8,84	2	8,41	4,9	0,992	8,50	3,8	0,992	8,54	3,4	0,992	1. kroutivý
3	14,64	3	14,69	-0,3	0,952	14,84	-1,3	0,951	14,93	-2	0,956	2. ohybový
4	16,15	4	15,42	4,5	0,926	15,56	3,6	0,938	15,69	2,8	0,936	2. kroutivý
5	18,55	6	16,94	8,7	0,916	17,05	8,1	0,914	17,29	6,8	0,915	1. příčný ohyb
6	21,30	8	21,60	-1,4	0,417	21,81	-2,4	0,467	21,99	-3,2	0,459	2. příčný ohyb
7	22,42											nebyl nalezen
8	31,09	12	25,78	17	0,767	25,93	17	0,651	26,27	16	0,864	3. příčný ohyb
9	35,55	13	26,94	24	0,270	27,04	24	0,292	27,14	24	0,267	4. příčný ohyb

Průměrná Δf a MAC:						
pro všechny tvary	6,2	0,693	5,5	0,689	4,8	0,709
pro tvary 1-5	3,1	0,956	2,2	0,958	1,5	0,959

Rozdíly, které jsou mezi modelem a experimentem, mohou být způsobeny různými faktory:

- Konstrukce byla buzena do 20 Hz, frekvence s menší mírou shody jsou umístěny nad 20 Hz.
- Vyšší míru neshody vykazují tvary s příčným ohybovým kmitáním mostovky, to může být způsobeno způsobem modelování trapézových výztuh. Přiléhavější by pravděpodobně bylo jejich modelování pomocí deskostěnových prvků, čímž by se lépe zohlednila jejich torzní tuhost. To by ale vedlo k výrazně vyšší náročnosti výpočtu.

Celkové závěry z teoretického výpočtu, verifikace výpočetního modelu a porovnání s experimentem je možno shrnout do následujících bodů:

- Vozovkové asfaltové souvrství spolupůsobí s hlavní nosnou konstrukcí a zvyšuje celkovou tuhost mostu, tedy i vlastní frekvence.
- Modul pružnosti vozovkového souvrství závisí na jeho kvalitě a teplotě při měření. Hodnota modulu pružnosti se může v závislosti na teplotě měnit až pětinásobně. Je tedy nutné měřit při experimentu teplotu vozovkových vrstev a pro změřenou teplotu dosadit do výpočtu odpovídající hodnotu modulu pružnosti.

F.5 Závěr

Z provedené modální analýzy mostu typu D byla získána řada praktických poznatků o modelování a o vlivu teploty na dynamické chování.

Experimentální měření na mostě v Choceradech. bylo provedeno při průměrné teplotě 15ºC. Při porovnávání naměřených frekvencí a tvarů s teoretickými modely s různým způsobem modelování vozovkových vrstev byl nejpřiléhavější takový model, kde bylo vozovkové souvrství zohledněno jak svojí hmotností, tak svojí tuhostí, která respektovala skutečnou teplotu při měření.

Na základě zjištěných skutečností lze zobecnit, že při tvorbě teoretického modelu, který má být použit pro výpočet dynamických charakteristik mostu tohoto typu, je nutné modelovat vhodným způsobem vozovkové a izolační souvrství. Tuhost souvrství je závislá na teplotě a nezanedbatelným způsobem ovlivňuje vypočtené dynamické charakteristiky.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Příloha G: Příklad použití experimentální modální analýzy na mostu typu E

Most typu E je mostní konstrukce o 3 – 5 polích z příčně dělených segmentů z předpjatého betonu s volnými kabely do max. rozpětí pole 60 m. Jako reprezentant skupiny E je uveden železobetonový předpjatý most přes Labe, evidenční číslo 16-014 na silnici I/16 Mělník – Brozánky.

G.1 Popis mostu

Most se skládá ze tří samostatných mostních konstrukcí. Most I tvoří mělnické předpolí, most II překonává řeku Labe a most III tvoří brozánecké předpolí. Předmětem experimentální modální analýzy byl most III přemosťující lesopark Brozánky, slepé rameno Labe a silnici II/246. Fotografie mostu je na obr. G.1. Modální analýza byla provedena při částečné uzavírce komunikace (viz obr. G.2). Při záznamu kmitání byla doprava na mostě dočasně vyloučena.

Most III je staticky spojitý nosník o čtyřech polích, rozpětí jednotlivých polí 28,6 + 2x50,6 + 30,8 m. Jedná se o komorový most zhotovený ze segmentů SSŽ F1. Výška komorových nosníků je 2,65 m. Most má proměnnou tloušťku stěn nad podporami a v polích.

G.2 Experiment

Hlavním cílem experimentální modální analýzy bylo ověření teoretického modelu konstrukce s volnými kabely. Dalším cílem bylo stanovení vlivu způsobu zatěžování na experimentálně vyšetřované modální charakteristiky mostu. Mostní konstrukce byla zatěžována harmonickou budící silou a silou s náhodným časovým průběhem. Budící síly byly vytvořeny pohybem hmoty elektrohydraulického budiče. Budič byl postupně umístěn ve vnitřním a v krajním poli mostu. Odezva mostu byla měřena ve 42 bodech (viz obr. G.3). Modální analýzou byly změřeny vlastní tvary a frekvence kmitání a poměrný útlum mostní konstrukce. Modální parametry byly zjišťovány také ze záznamů odezvy mostní konstrukce při průjezdu vozidel po jedné polovině mostu.

Modální analýza při buzení náhodnou budící silou byla provedena v pásmu frekvencí 0,5 až 16 Hz. Odděleně byly vyhodnoceny modální charakteristiky pro obě polohy budiče. Vyhodnocené vlastní frekvence a poměrné útlumy jsou pro obě polohy budiče prakticky stejné. Nejvýraznější vlastní frekvence jsou cca 2,7 Hz a 3,7 Hz. Jedná se převážně o ohybové kmitání mostu. Srovnání hodnot naměřených s vypočtenými je uvedeno v tab. G.1.

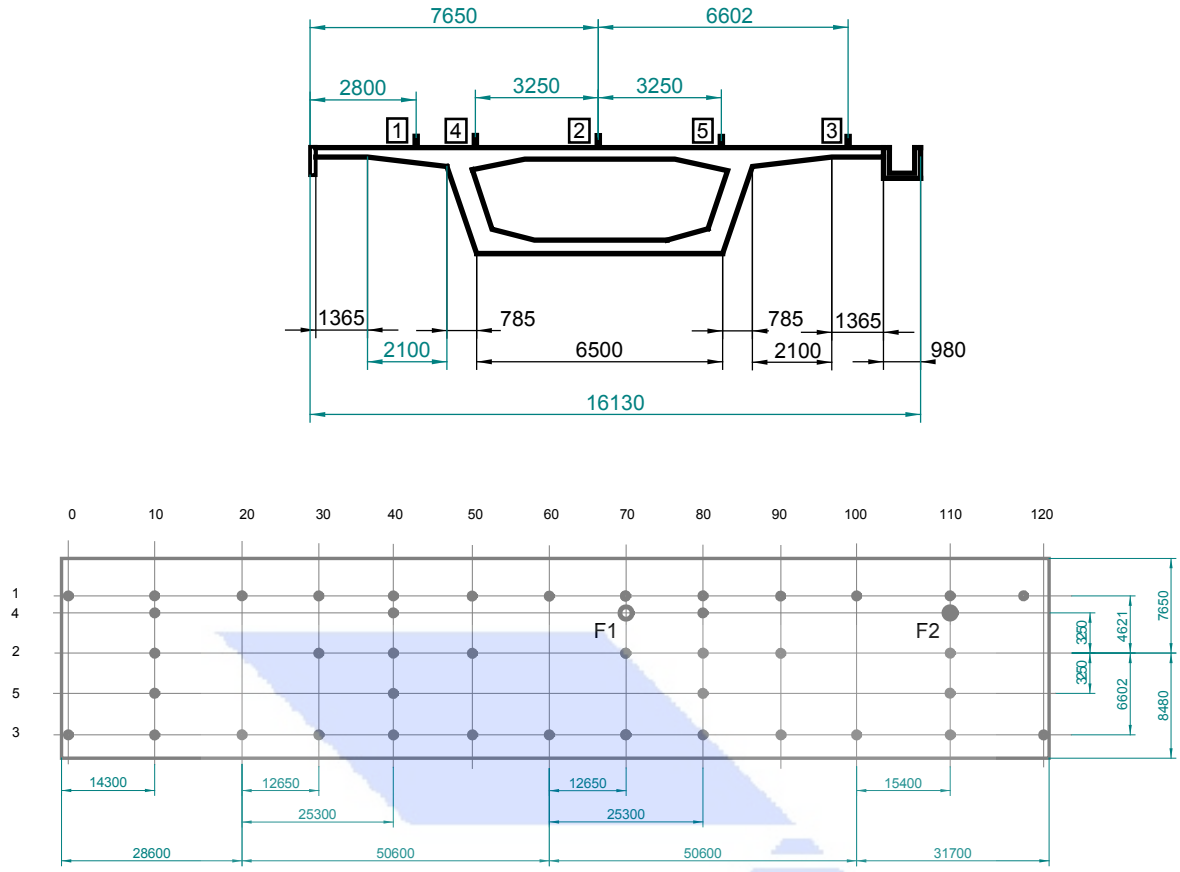
Při harmonickém kmitání se amplituda buzení stupňovitě měnila s krokem 0,05 Hz ve třech pásmech, v kterých se předpokládal vznik nejnižších vlastních frekvencí. Dynamická odezva mostu byla opět měřena pro obě polohy budiče na mostě. V nejnižším pásmu frekvencí (1,9 Hz až 2,1 Hz) se v křivkách poddajnosti pro některá místa měření objevoval vrchol na frekvenci 1,9 Hz pro kmitání v podélném směru. Existenci vlastní frekvence se však nepodařilo prokázat. Naopak byly zcela prokazatelně potvrzeny dvě nejnižší frekvence odpovídající ohybovému tvaru kmitání. (2,7 Hz a 3,7 Hz). Srovnání naměřených hodnot pro harmonické kmitání s hodnotami při náhodném buzení a s hodnotami teoretickými je opět v tab. G.1.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Obr. G.1 Pohled na most

Obr. G.2 Umístění budiče na mostě

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.



Obr. G.3 Schéma měřených míst a pozic budiče

Tab. G.1 Srovnání naměřených a vypočtených vlastních frekvencí mostu

i	Výpočet		Popis tvaru	Budič - náhodná síla		Budič - harmonická síla	
	f_i [Hz]	Poměrný útlum [%]		f_i [Hz]	Poměrný útlum [%]	f_i [Hz]	Poměrný útlum [%]
1	0,777	1,59	axiální	-	-	-	-
2	2,67	1,59	ohyb antimetrický	2,713	1,13	2,70	1,30
3	3,387	1,59	ohyb a kroucení	(3,85)	-	(3,9)	-
4	3,797	1,59	ohyb symetrický	3,675	1,09	3,7	1,36
5	4,898	1,59	ohyb a kroucení sym.	5,927	2,33	-	-
6	5,908	1,59	ohyb a kroucení antim.	6,575	2,47	-	-

Experimentální modální analýza ukázala, že horní deska komorového mostního segmentu je relativně měkká. Při experimentální modální analýze byla zjištěna řada tvarů, ve kterých je dominantní deformací průhyb desky mostovky nebo deformace konzol mostu. Tyto tvary nejsou v podstatě ovlivněny podporami hlavní nosné konstrukce. Použitý výpočtový model mostu umožňuje poměrně přesně stanovit nejnižší vlastní frekvence mostu,

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

zejména v případě, že jim odpovídají tvary kmitání s převažující ohybovou deformací. Pro posouzení chování horní desky komorového průřezu však nevyhovují.

Použití budicí síly s náhodným průběhem je spolehlivé a vyžaduje relativně malý počet měření k získání požadovaného souboru informací. Experimentálně stanovené nejnižší vlastní frekvence tlumeného kmitání při buzení náhodnou a harmonickou silou se prakticky neliší.

Předností buzení silou s harmonickým průběhem a konstantní frekvencí ve srovnání s ostatními použitými metodami buzení je relativně velký silový účinek na most, který souvisí s časovým průběhem síly a malým poměrem mezi maximální a efektivní hodnotou síly. Nedostatkem je selektivní buzení s nastavenou frekvencí budicí síly a jejími vyššími násobky, pracnost a časová náročnost při provádění a vyhodnocování měření. Při vyhodnocování je nutné sledovat frekvenční složky odezvy v blízkém okolí frekvencí budicí síly. Při měření přenosových funkcí pro modální analýzu je účelné volit více pozic budiče. Modální analýza všech naměřených přenosových funkcí usnadňuje identifikaci tvarů kmitání s blízkými vlastními frekvencemi.

Dynamická odezva mostu byla zjišťována také při zatížení dopravou. Největší statické a dynamické účinky mají průjezdy těžkých vozidel (domíchávače betonu, nákladní auta s přívěsem převážející uhlí apod.). Ze záznamů kmitání při přejezdu vozidel lze za jistých podmínek odhadnout nejnižší (nebo dominantní) vlastní frekvence soustavy most + proud vozidel a odpovídající tvary kmitání.

G.3 Teoretický výpočet

Pro výpočet byl sestaven teoretický model konstrukce mostu III v programu FEAT 4.2. Byl modelován spojitý nosník o třech polích včetně spodní stavby mostu. Veškeré rozměry konstrukce ve shodě s původní projektovou dokumentací byly v teoretickém modelu respektovány.

Předpjatá komorová konstrukce s oboustrannými konzolami horní desky byla modelována jako nosníková konstrukce proměnného průřezu v podélném směru. Byla respektována proměnná tloušťka jednotlivých částí průřezu v podporových i mezipodporových oblastech. Vzhledem k rozměrům jednotlivých částí průřezu komorového nosníku byla zanedbána případná deplanace průřezu.

Na mostě jsou dva masivní monolitické prvky. Na jedné straně mostu to je chodníková deska s římsou a na druhé straně to je deska s odvodňovacím žlabem. Obě monolitické železobetonové desky nejsou v podélném směru přerušené žádnou dilatací. Jsou uloženy na celoplošné izolaci desky mostovky. Bylo uvažováno spolupůsobení obou desek s hlavním nosníkem komorového průřezu v příčném směru. Podélné spolupůsobení díky izolaci proti vlhkosti bylo uvolněno s výjimkou koncových částí spojitého nosníku. Vliv tuhosti mostních svodidel a zábradlí byl ve výpočtu odezvy ve srovnání s tuhostí masivních betonových průřezů zanedbán. Vozovkové a izolační souvrství bylo uvažováno pouze svou hmotností. Tuhost asfaltových vrstev v případě masivní komorové železobetonové konstrukce je relativně malá a byla proto zanedbána.

Mostní pilíře byly modelovány podle skutečného tvaru těchto pilířů podle projektové dokumentace. Masivní základová deska na velkoprůměrových pilotách byla nahrazena ve výpočtovém modelu vetknutím pilířů do podloží. Spoj hlavního mostního nosníku s pilíři, tvořený mostními ložisky, byl modelován pomocným tuhým prutem, který umožňuje pootáčení a posuvy v podélném a příčném směru mostu vůči pilířům nebo krajní opěře, ve shodě s typem mostního ložiska.

Materiálové charakteristiky železobetonu hlavního nosníku, chodníkové i žlabové části a pilířů odpovídají mechanickým hodnotám betonu, uvedeným v projektové dokumentaci.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Hmotnost budiče a doprovodného vozidla byla respektována vždy ve své skutečné poloze na mostě. Buzení bylo uvažováno jako harmonické s amplitudou budící síly F = 1 kN ve svislém směru. Budící síla byla zavedena do hlavního nosníku s respektováním excentricity umístění budiče v příčném směru.

Nejnižší vypočtené vlastní frekvence kmitání mostu jsou sestaveny v tab. G.2.

Tab. G.2 Vlastní frekvence kmitání mostu

i	$f_{(i)}$ [Hz]	Obr.3	Popis vlastního tvaru kmitání
$f_{(1)}$	0,778	a	podélné kmitání hlavního nosníku s ohybem středního pilíře 12 P
$f_{(2)}$	1,941	b	kroutivé kmitání středních rozpětí ve fázi okolo podélné osy *x*
$f_{(3)}$	2,072	c	kroutivé kmitání středních rozpětí v protifázi okolo podélné osy *x*
$f_{(4)}$	2,691	d	základní ohybové kmitání hlavního nosníku
$f_{(5)}$	3,525	e	kroutivé a ohybové kmitání s kmitnou v krajním poli u Brozánek
$f_{(6)}$	3,594	f	vyšší kroutivý a ohybový tvar
$f_{(7)}$	3,795	g	vyšší kroutivý a ohybový tvar
$f_{(8)}$	3,812	h	vyšší kroutivý tvar
$f_{(9)}$	4,224	i	vyšší kroutivý a ohybový tvar s kmitnami v krajním a středním poli u Brozánek
$f_{(10)}$	4,278	j	vyšší kroutivý a ohybový tvar s kmitnami v krajním a středním poli u Mělníka

Poznatky plynoucí z výpočtu vlastního kmitání:

a) hmotnost budiče prakticky neovlivňuje velikost vypočtených vlastních frekvencí, vzhledem k velké hmotě mostu vůči hmotě budiče

b) spojité rozložení hmotnosti vozovky v příčném směru umožňuje soustředění její hmotnosti do osy mostu; toto zjednodušení prakticky neovlivňuje velikost vypočtených vlastních frekvencí

c) spektrum vlastních frekvencí mostu je relativně husté a vzhledem k příčnému sklonu hlavního nosníku jsou na nejnižších frekvencích dominantní převážně kroutivé tvary

d) spektrum nejnižších vypočtených 10 vlastních tvarů uvedených v tab. G.2 by bylo možno hodnotit podle vypočtených průběhů rezonančních křivek pro jednotlivé vybrané body na konstrukci a pro obě pozice budiče.

Pro výpočet vynuceného kmitání bylo použito harmonické buzení s konstantní amplitudou budící síly 1 kN v jednotlivých frekvenčních krocích. Výpočet byl proveden pro dva výpočetní modely odpovídající poloze budiče ve frekvenčním intervalu od 0 do 15 Hz. Výpočet vynuceného kmitání byl proveden pro tlumení charakterizované logaritmickým dekrementem tlumení $\Theta = 0{,}1$.

Výpočet odezvy konstrukce byl proveden pro svislé buzení, výsledné hodnoty odezvy byly stanoveny ve směru všech tří globálních os. Odezva konstrukce byla vypočítána ve vybraných bodech konstrukce, v každém příčném řezu byly získány numerické hodnoty jak v krajních bodech vozovky, tak v ose hlavního nosníku. Pro každou polohu budiče bylo určeno 17 příčných řezů, v kterých byla vypočtena odezva mostu.

Použitý výpočtový nosníkový model neumožňuje zahrnout do výpočtu možnost příčné deplanace průřezu. Model s použitím plošných prvků, který by umožnil zahrnout vliv deplanace průřezů do výpočtu odezvy, nebylo možné vzhledem k velikosti modelované

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

konstrukce použít kvůli nadměrnému rozsahu úlohy. V daném případě tuhého komorového průřezu je vliv deplanace na velikost celkové dynamické odezvy zanedbatelný.

Pro případné zahrnutí vlivu deplanace do výpočtového modelu by bylo nutné vycházet z významně složitějšího výpočtového modelu, kde by jednotlivé části průřezu byly modelovány jako plošné prvky. Pro dostatečně malou velikost těchto plošných prvků v rozsahu celého mostu o čtyřech polích není taková úloha prakticky řešitelná na stávající výpočetní technice.

Pro účely porovnání teoretických a experimentálních hodnot dynamické odezvy konstrukce byl proveden přepočet mostu pro skutečně naměřené útlumové vlastnosti mostu a pro různá variantní uspořádání modelu konstrukce.

G.4 Závěr

Cílem provedené dynamické zkoušky bylo stanovení modálních charakteristik mostu pomocí různých metod zatěžování. Modální analýzou při zatěžování elektrohydraulickým budičem s náhodným průběhem budicí síly bylo nalezeno pět tvarů vlastního kmitání velmi blízkých vlastním tvarům vypočteným se shodnými nebo blízkými frekvencemi. Vyšší vlastní frekvence jsou seskupeny v relativně úzkém pásmu frekvencí, což ztěžuje jejich identifikaci. Pro tento způsob buzení byla ověřena metodika modální analýzy mostu pro dvě pozice budiče, což umožňuje lépe rozlišit tvary kmitání s blízkými vlastními frekvencemi.

Nejnižší tvary kmitání byly stanoveny také z měření odezvy mostu na harmonické buzení pro dvě polohy budiče. Výsledky modální analýzy pro obě použité pozice budiče jsou téměř shodné. Vlastní frekvence a tvary kmitání jsou blízké výsledkům měření s náhodným signálem a vypočteným charakteristikám. Při modální analýze s harmonickou budicí silou byly zjištěny vyšší hodnoty poměrného útlumu než při modální analýze s náhodnou budicí silou. V omezeném rozsahu byla ověřena možnost stanovení vlastních frekvencí a tvarů kmitání z měření odezvy mostu při průjezdu vozidel.

Výpočtový model mostní konstrukce a následná analýza dynamické odezvy vycházely ze způsobu provedení dynamické zkoušky mostu. Výpočtový model byl použit pro výpočet spektra vlastních frekvencí a velikost dynamické odezvy při jednotkovém buzení ve dvou variantách umístění budiče na mostě.

Materiálové charakteristiky zavedené do výpočtu byly zvoleny tak, aby odpovídaly projektovým hodnotám. Případné odchylky naměřených veličin při dynamické zkoušce mohou být ovlivněny vývojem pevnostních charakteristik materiálů mostních průřezů s časem vůči projektovým hodnotám a dále nejrůznějšími geometrickými odchylkami skutečného provedení mostu od projektového stavu, odchylkami chování konstrukce v podloží pilířů a opěr nebo případnými drobnými poruchami mostu (trhlinami), vzniklými během jeho užívání.

Tento dokument je obsahově identický s oficiální tištěnou verzí. Byl vytvořen v systému TP online a v žádném případě nenahrazuje tištěnou verzi.

Technické podmínky TP 215

Název:	Využití modální analýzy pro návrh, posouzení, opravy, kontrolu a monitorování mostů pozemních komunikací
Vydal:	Ministerstvo dopravy , Odbor silniční infrastruktury
Zpracoval:	ČVUT Fakulta stavební:
	Doc. Ing. Tomáš Rotter, CSc.
	Doc. Ing. Michal Polák, CSc.
	ČVUT Kloknerův ústav:
	Ing. Jaromír Král, CSc.
Realizační výstup :	803/120/112 Využití modální analýzy pro hodnocení mostních konstrukcí
	1F45D/077/120 Odezva mostů na zatížení teplotou a dopravou
Počet stran:	80
Formát:	A4
Tisk a distribuce:	PRAGOPROJEKT a.s.,
	K Ryšánce 1668/16, 147 54 Praha 4
	(www.pragoprojekt.cz/předpisy)